

Sintesi in frequenza

Uso delle reti di correzione

Fondamenti di Automatica
2015-16

A. De Luca, 3 Dicembre 2015

ipotesi di lavoro

sistema ad anello aperto $P(s)$ **senza** poli a parte reale positiva

passo 1: imporre le specifiche a regime permanente

- ingresso-uscita
 - ingressi polinomiali: tipo k , attenuazione errore $e_k \leq E_{max}$
 - ingressi sinusoidali: riproduzione o attenuazione $|e(t)| \leq E_{max}$
- disturbo-uscita
 - disturbi costanti: astatismo o attenuazione $|e_z(t)| \leq E_{z,max}$
 - disturbi sinusoidali: attenuazione in un campo $(\omega_{min}, \omega_{max})$
 \Rightarrow con maschere in frequenza sul modulo
- sensibilità alle variazioni parametriche



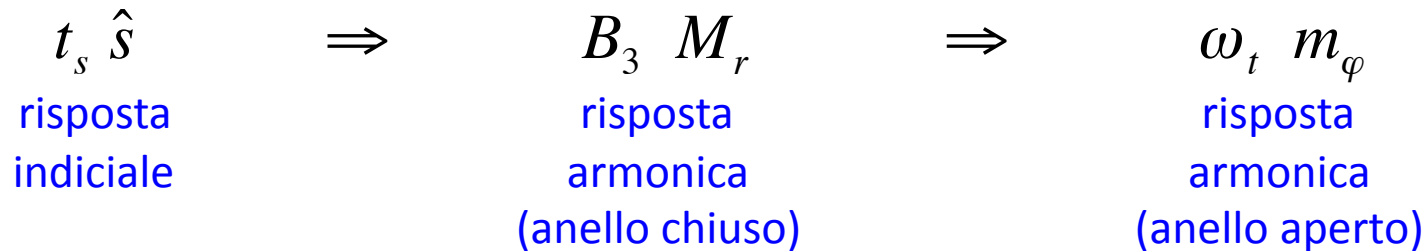
- **azioni** nel controllore $C(s)$:

$$\blacktriangleright |K_c| \quad \frac{1}{s^h} \quad \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \dots$$

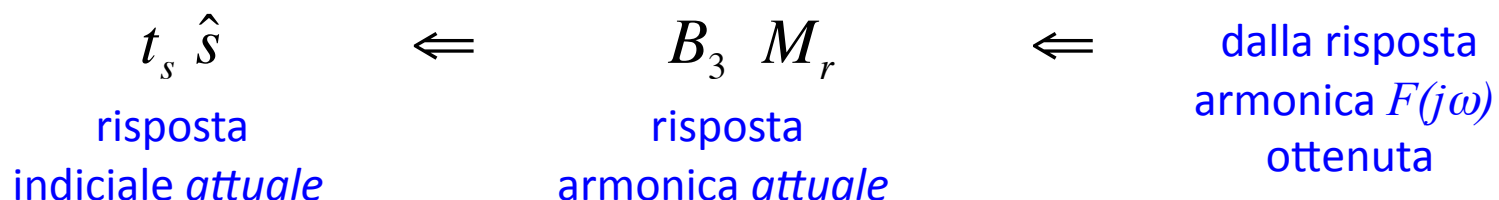
il minimo guadagno (in modulo) così trovato non andrà più ridotto!

passo 2: imporre le specifiche sul transitorio

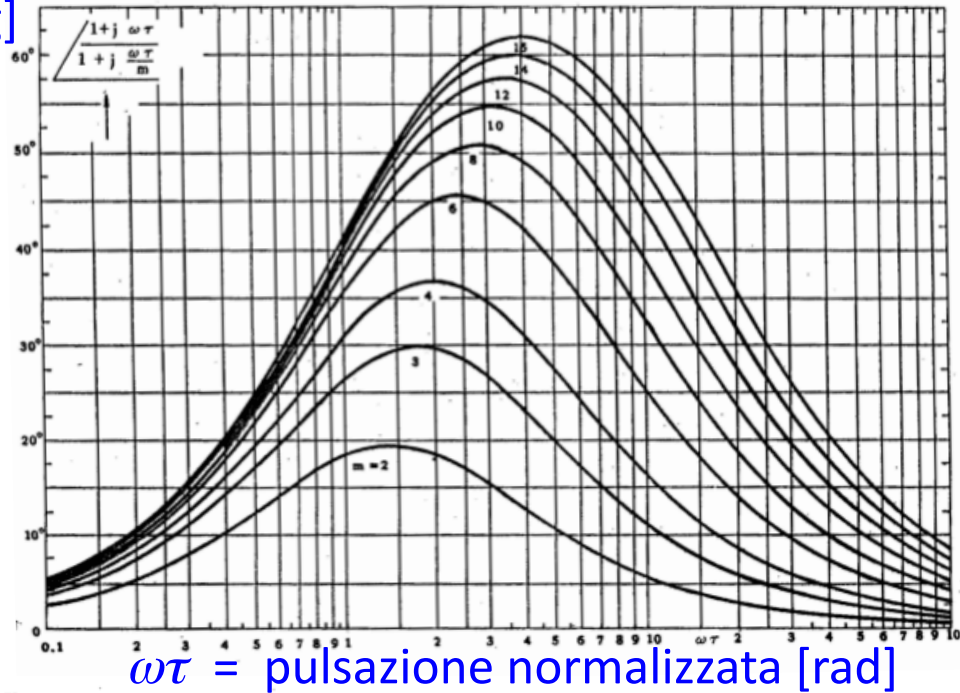
- trasformazione di specifiche tra domini



- azioni** nel controllore $C(s)$:
 - **aggiungere** reti di correzione (o di compensazione) $R(s)$ in frequenza, eventualmente **umentando** il guadagno
 - $C(s)$ complessiva tale che $F(j\omega) = P(j\omega) C(j\omega)/K_d$ abbia le desiderate ω_t e m_ϕ
- verifica** del progetto (per simulazione o esperimenti reali)



+ [deg]



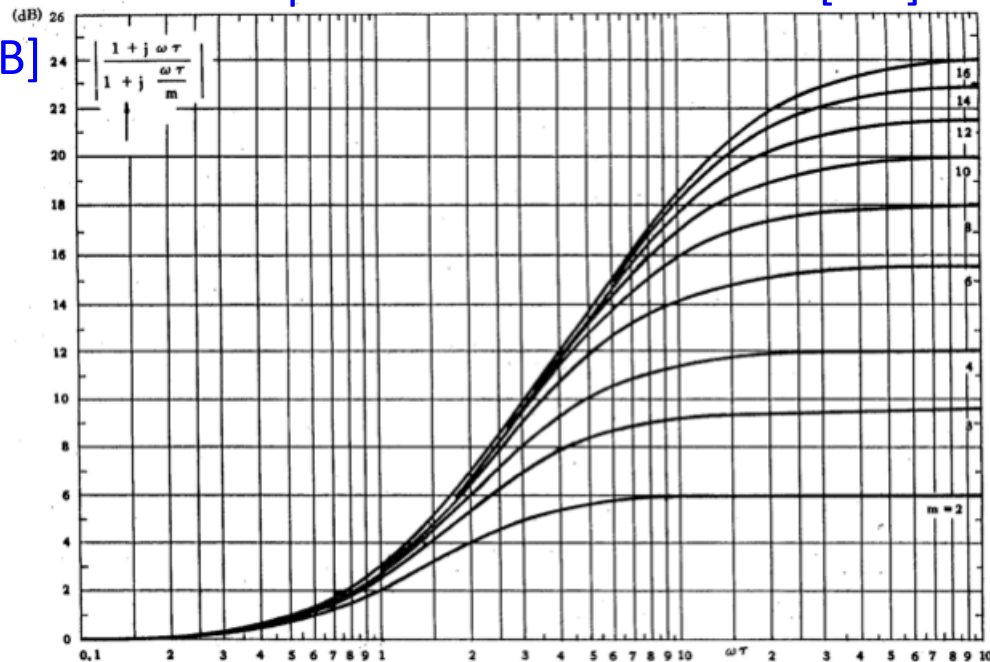
fasi
“anticipate”
in un campo
di frequenze

$$R_{ant}(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s}$$

**reti di correzione
anticipatrici
(lead)**

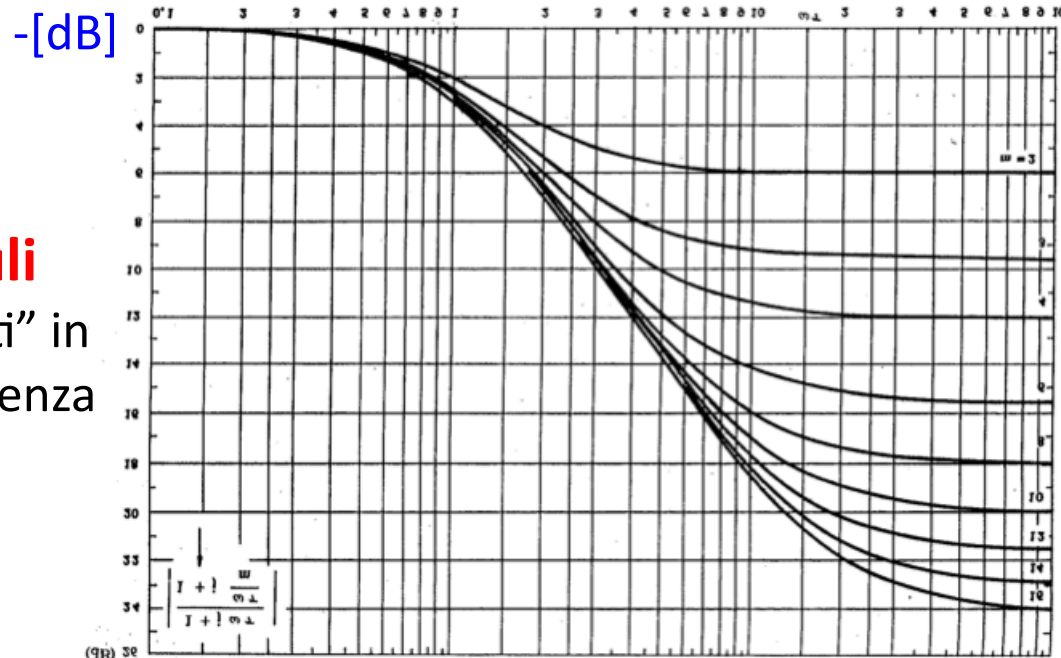
- guadagno unitario
- zero precede polo

+ [dB]



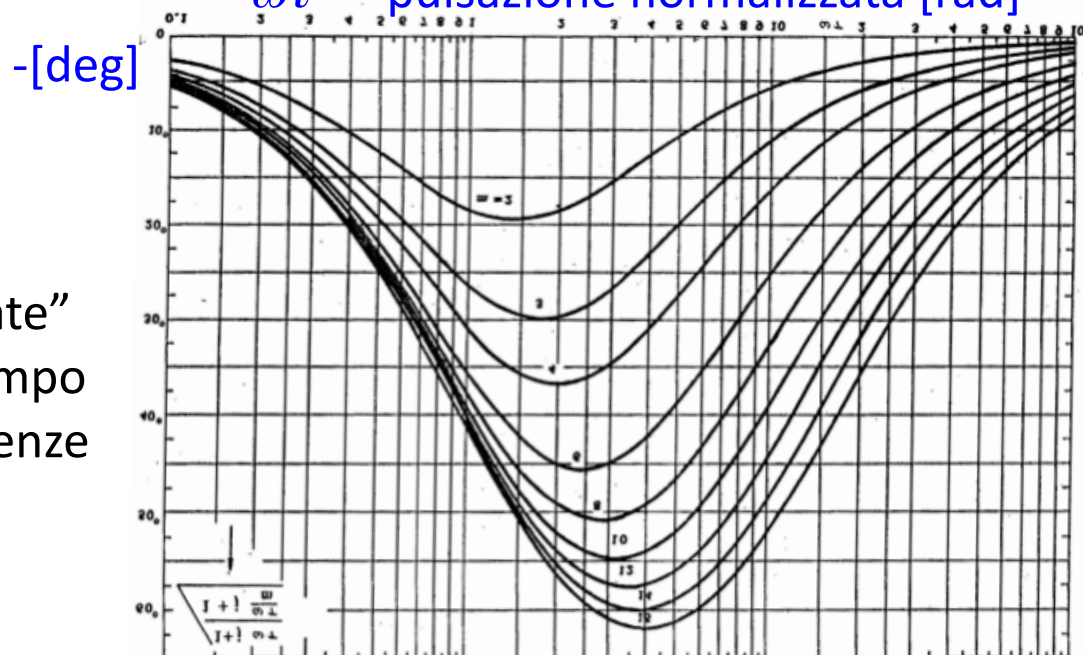
moduli
“amplificati” in
alta frequenza

moduli
 “attenuati” in
 alta frequenza



$\omega\tau =$ pulsazione normalizzata [rad]

fasi
 “ritardate”
 in un campo
 di frequenze



$$R_{att}(s) = \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s}$$

**reti di correzione
 attenuatrici
 (lag)**

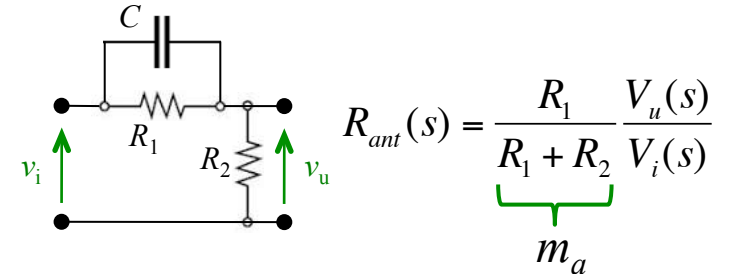
- guadagno unitario
- zero segue polo

sono gli stessi
 grafici di prima,
 ma “ribaltati”!!

effetti della rete **anticipatrice** (lead)

- 😊 aumenta la pulsazione di taglio ω_t
- 😊 aumenta la velocità di risposta
- 😞 aumenta lo sforzo di controllo
- 😞 più sensibile ai rumori
- 😞 ... e alle dinamiche veloci non modellate

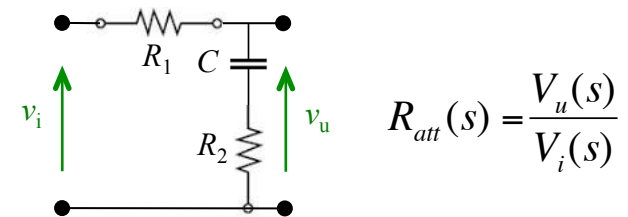
$$R_{ant}(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s}$$



effetti della rete **attenuatrice** (lag)

- 😞 riduce la pulsazione di taglio ω_t
- 😞 riduce la velocità di risposta
- 😊 riduce lo sforzo di controllo
- 😊 poco sensibile ai rumori
- 😊 ... e alle dinamiche veloci non modellate

$$R_{att}(s) = \frac{1 + (\tau_i / m_i) s}{1 + \tau_i s}$$



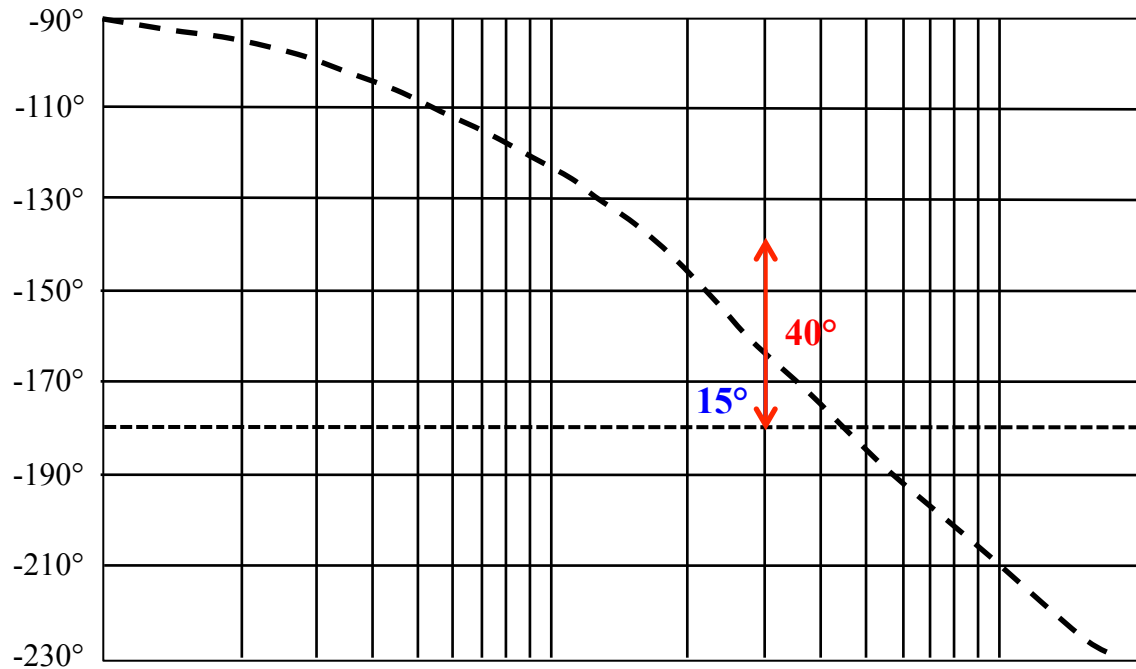
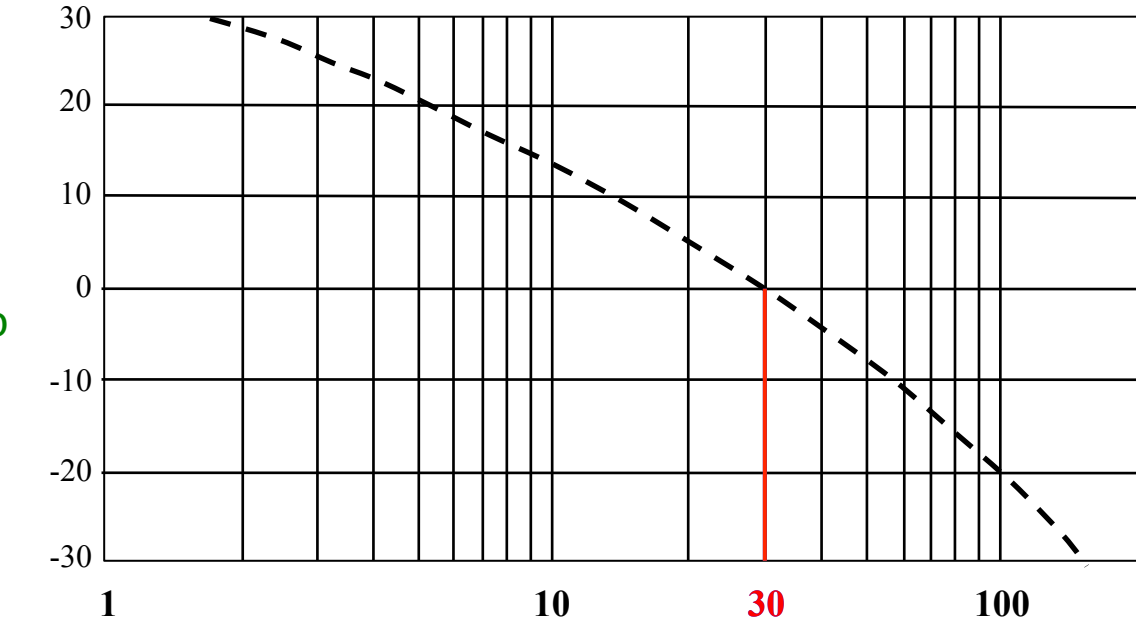
Esempio # 1

aumento
margine di fase
a parità
di pulsazione
di attraversamento

iniziali

$$\hat{\omega}_t = 30$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



desiderati

$$\omega_t \approx 30$$

$$m_\varphi = 40^\circ$$



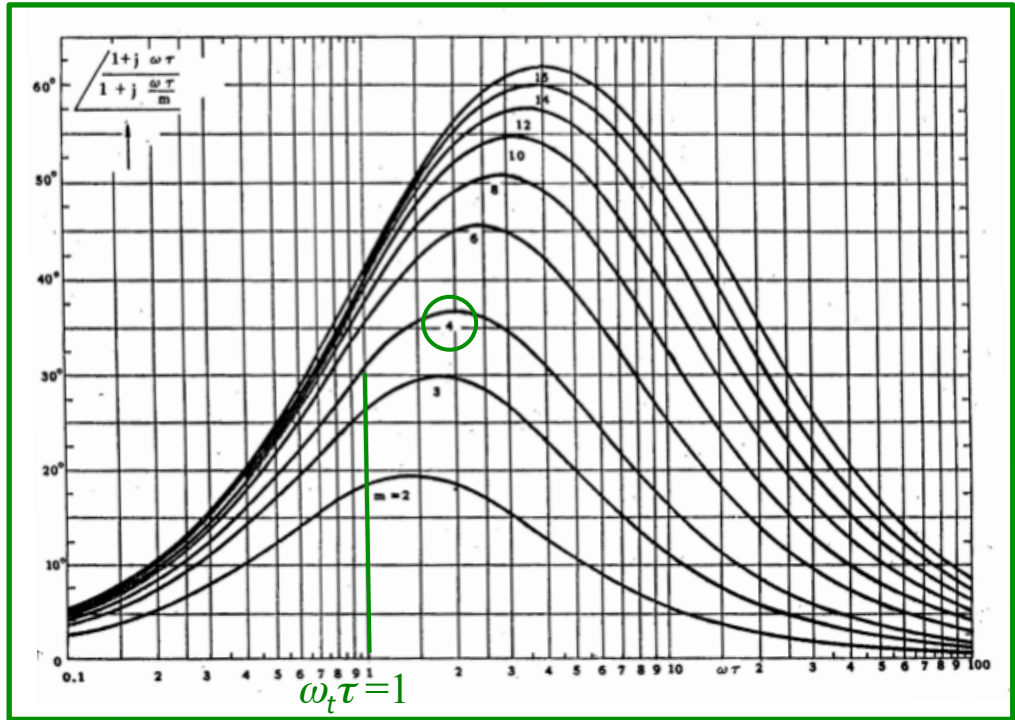
anticipatrice
con circa 30°
di recupero

(una parte si
perderà per lo
'shift' in avanti
della ω_t)

Esempio # 1

$$\omega_t \cong \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi > \hat{m}_\varphi$$



anticipatrice

$m_a = 4$
per avere 30°
abbondanti
per il recupero

usata vicino al
(a sinistra del)
picco

$$\omega_t \tau_a \cong 1$$

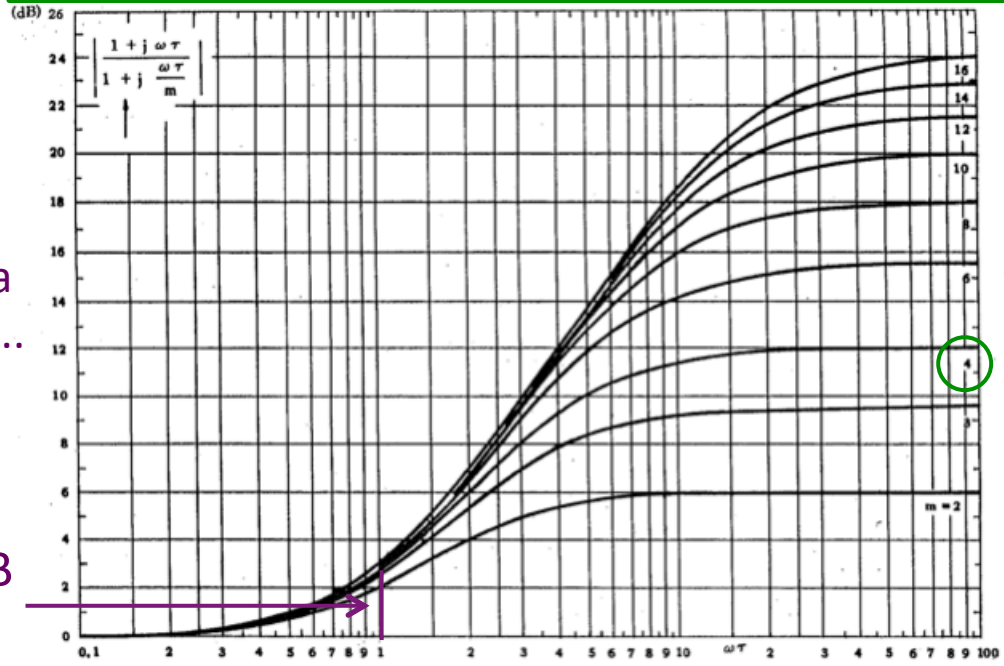
centrata @

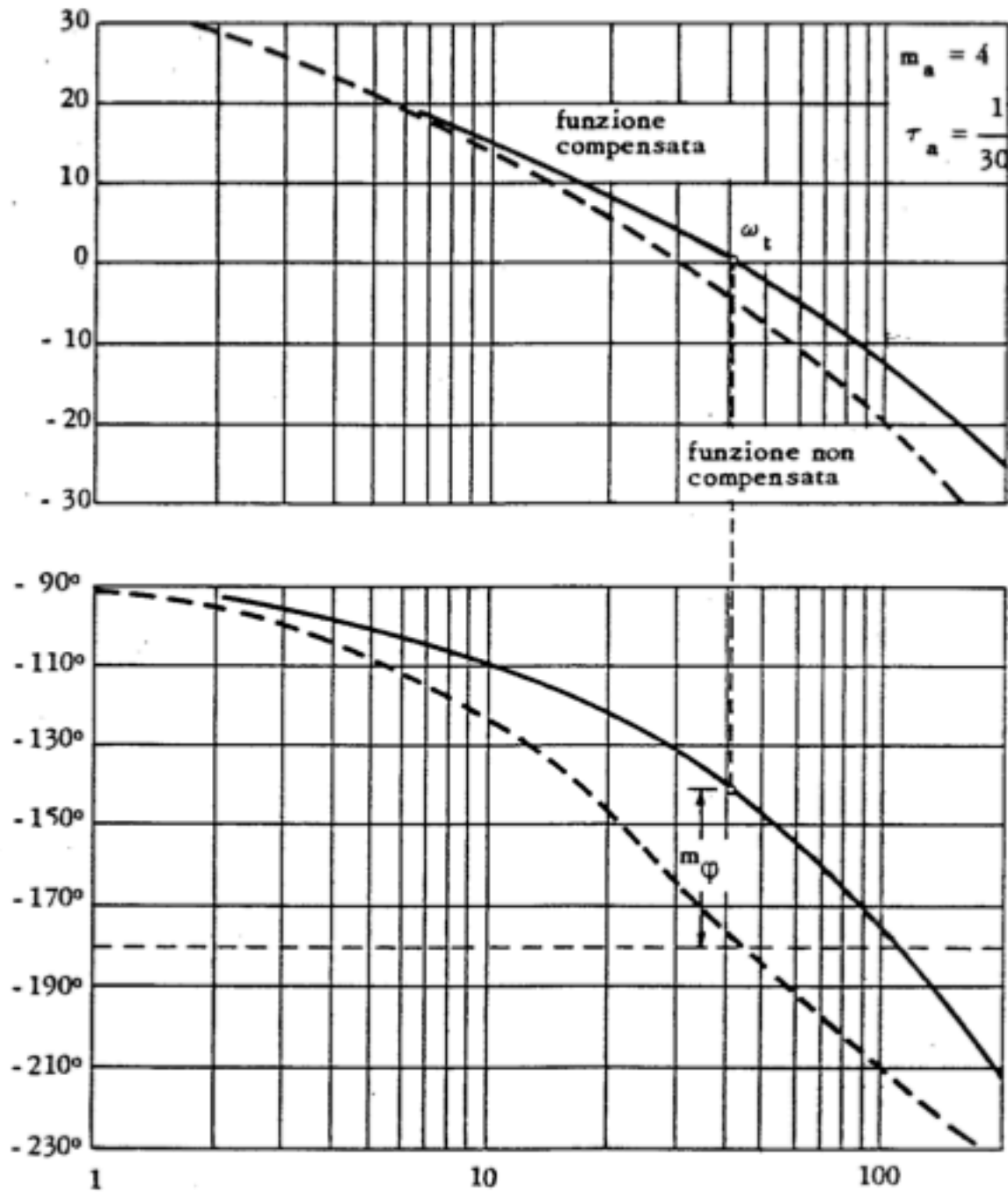
$$\omega_t = 30$$

$$\Rightarrow \tau_a = 1/30$$

ω_t si sposterà
(di poco) verso una
frequenza più alta ...

+ 3 dB
@ ω_t





Soluzione # 1

$$\begin{aligned}
 R_{ant}(s) &= \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= \frac{1 + (1/30) s}{1 + (1/120) s} \\
 &= 4 \cdot \frac{s + 30}{s + 120}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t = 40$$

$$m_\phi = 40^\circ$$

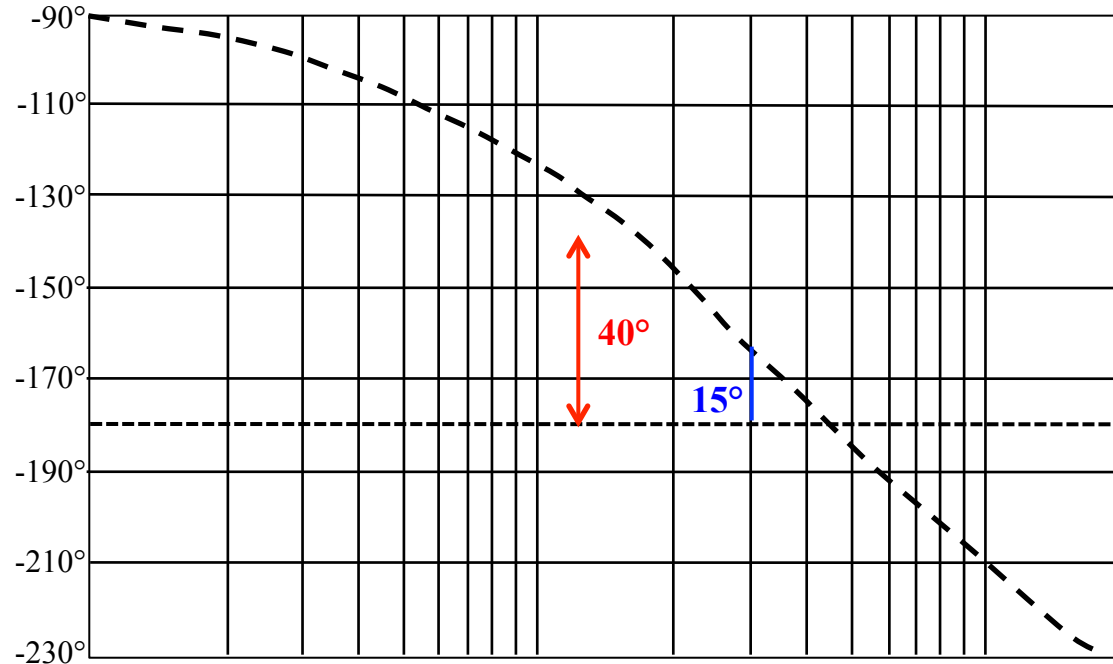
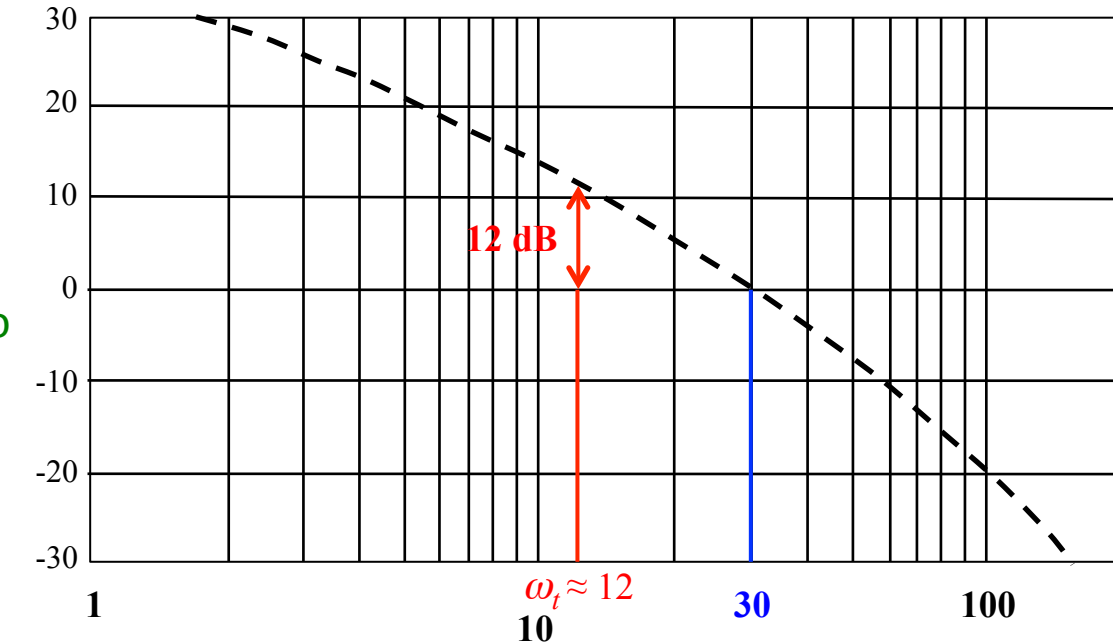
Esempio # 2

aumento
margine di fase
con diminuzione
di pulsazione
di attraversamento

stessi valori
iniziali di # 1

$$\hat{\omega}_t = 30$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



nuovi valori
desiderati

$$\omega_t \leq \hat{\omega}_t$$

quanto basta per

$$m_\varphi = 40^\circ$$



ad esempio

$$\omega_t \approx 12$$

dove la fase è
abbondante (50°)

si deve attenuare

$$|G(j\omega_t)| = 12 \text{ dB}$$



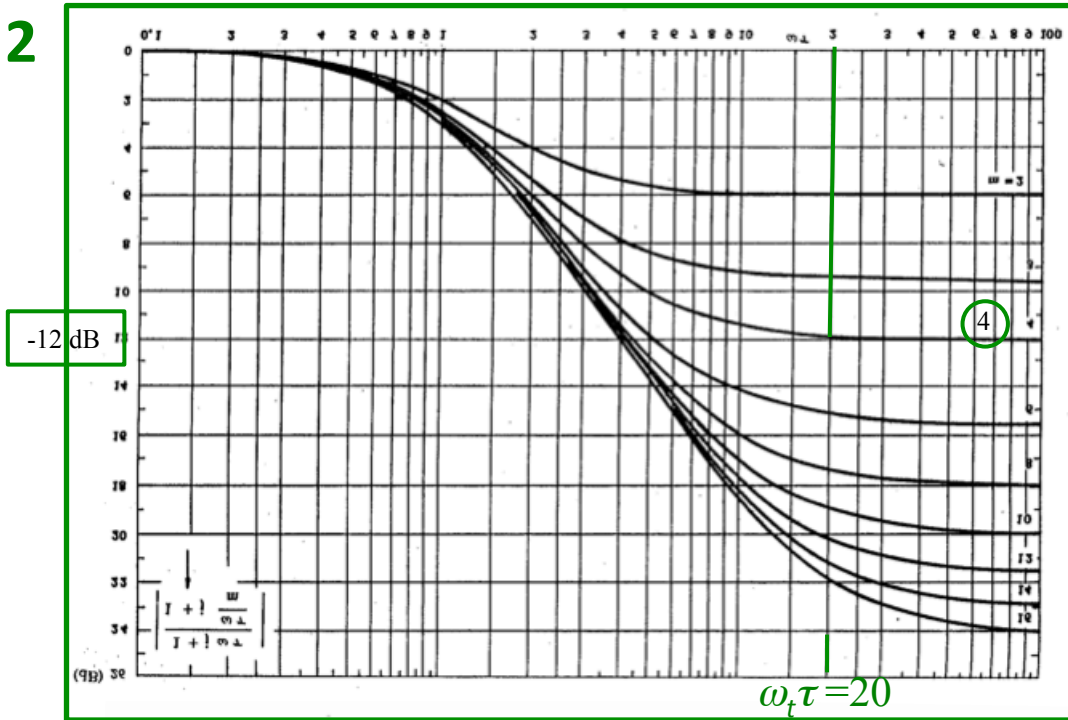
attenuatrice

usata
"in coda"

Esempio # 2

$$\omega_t \leq \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi > \hat{m}_\varphi$$



attenuatrice

$m_i = 4$
per avere i
necessari -12 dB
di attenuazione

usata verso
la coda

$$\omega_t \tau_i \cong 20$$

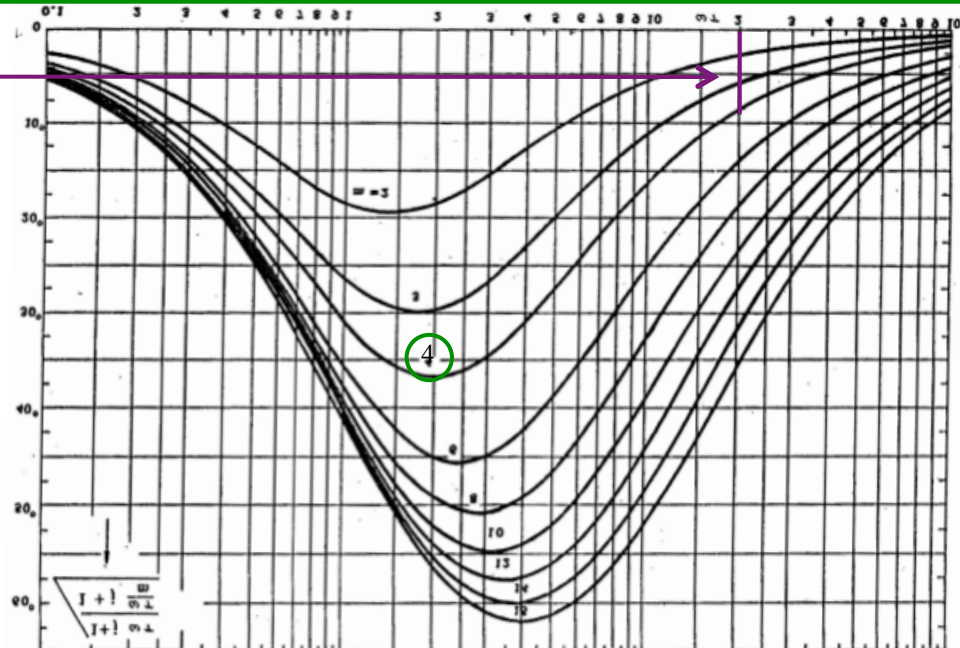
centrata @

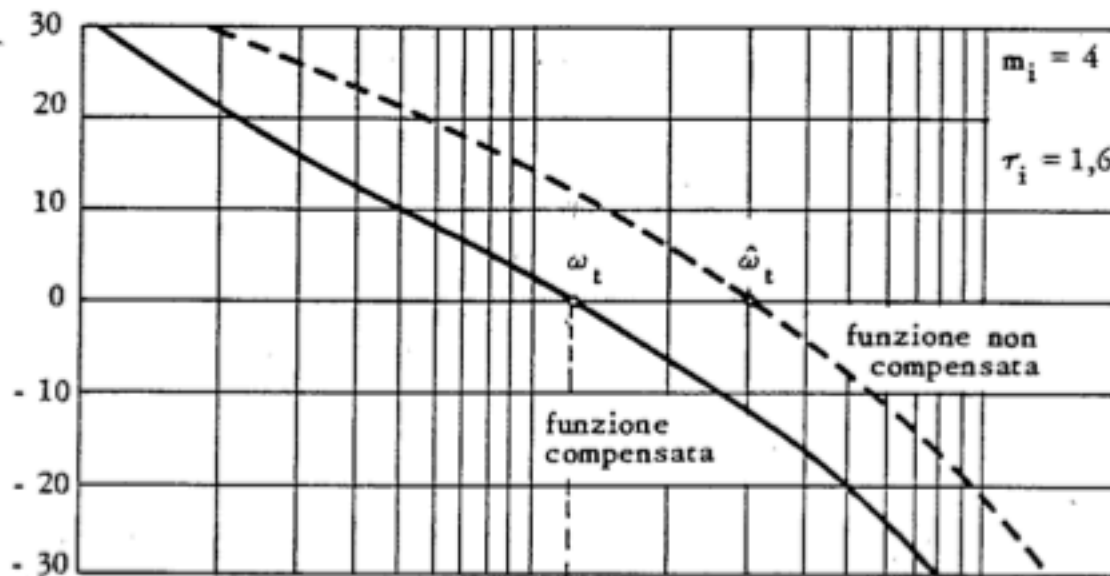
$$\omega_t = 12$$

$$\Rightarrow \tau_i = 20/12 = 1.\bar{6}$$

-8°
@ ω_t

si perderà un po'
del margine di fase
guadagnato ...





Soluzione # 2

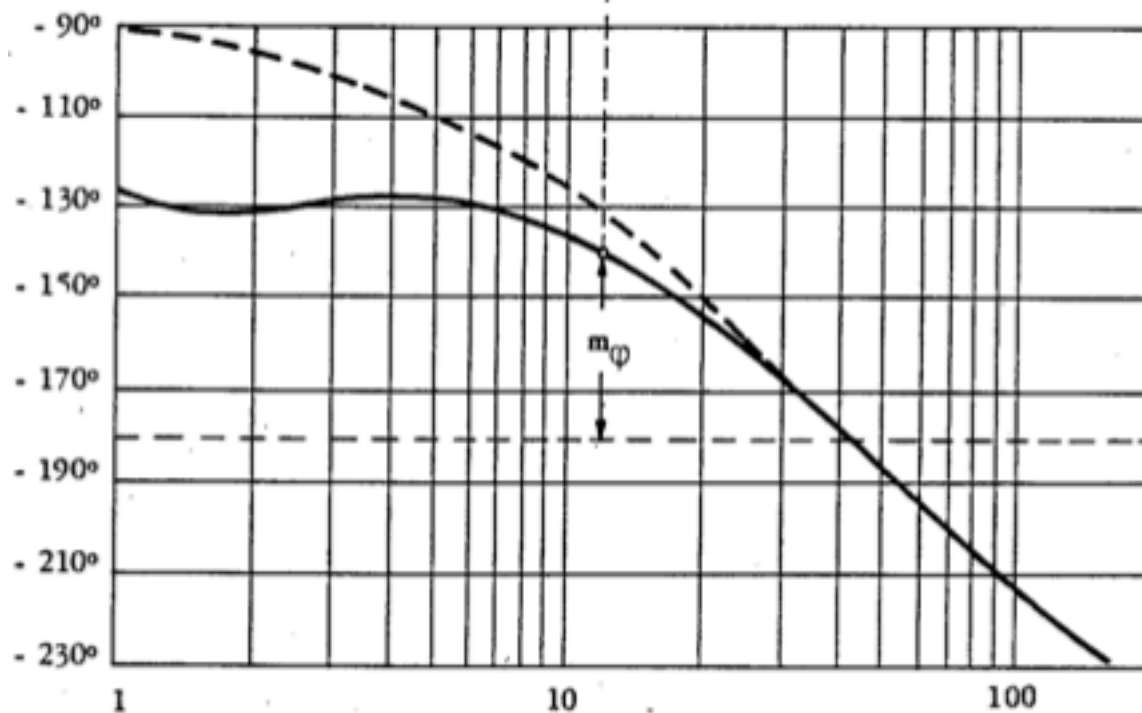
$$\begin{aligned}
 R_{att}(s) &= \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s} \\
 &= \frac{1 + (5/12)s}{1 + (20/12)s} \\
 &= 0.25 \cdot \frac{s + 2.4}{s + 0.6}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t = 12$$

$$m_\varphi = 42^\circ$$



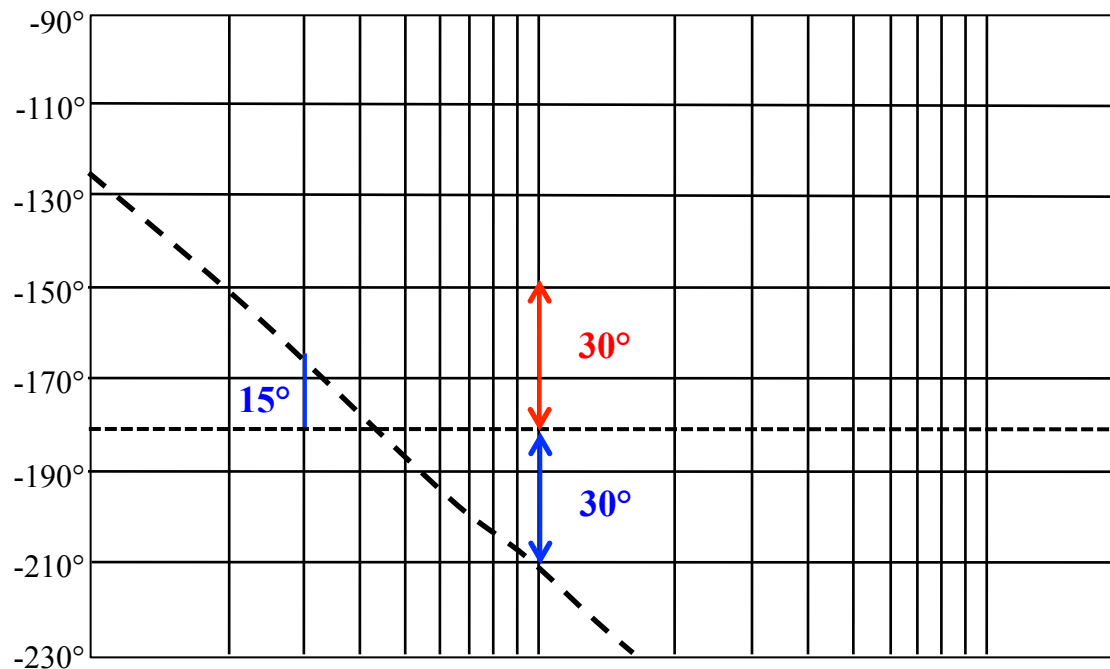
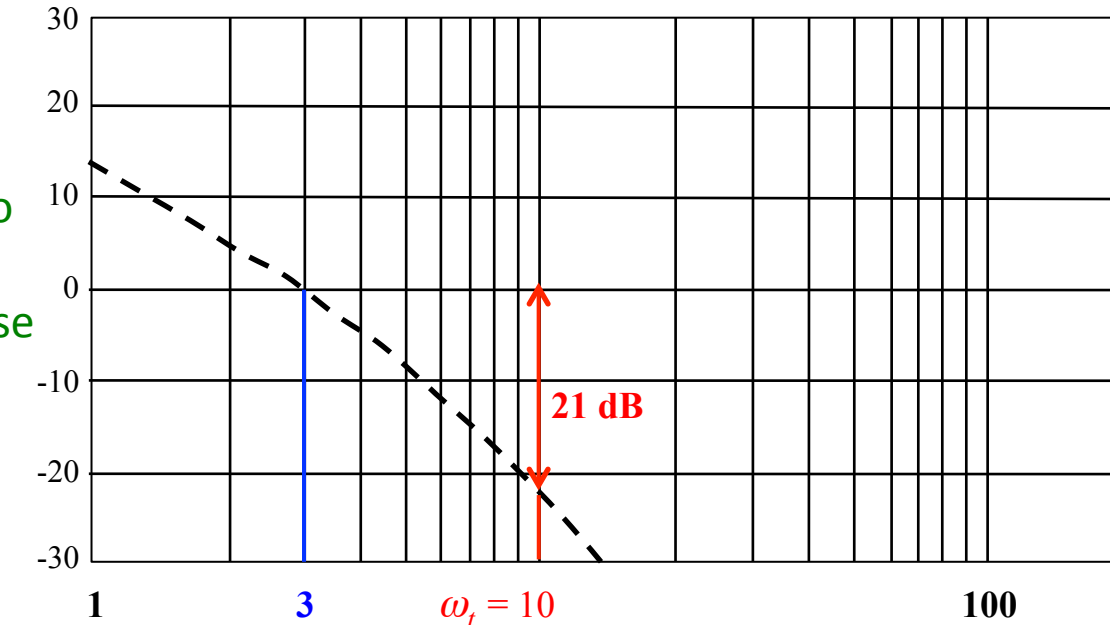
Esempio # 3

aumento
della pulsazione
di attraversamento
preservando un
buon margine di fase

iniziali

$$\hat{\omega}_t = 3$$

$$\hat{m}_\varphi = 15^\circ$$



desiderati

$$\omega_t = 10$$

$$m_\varphi \geq 30^\circ$$



non basta solo un
guadagno +21 dB
(non ho margine
di fase @ ω_t)

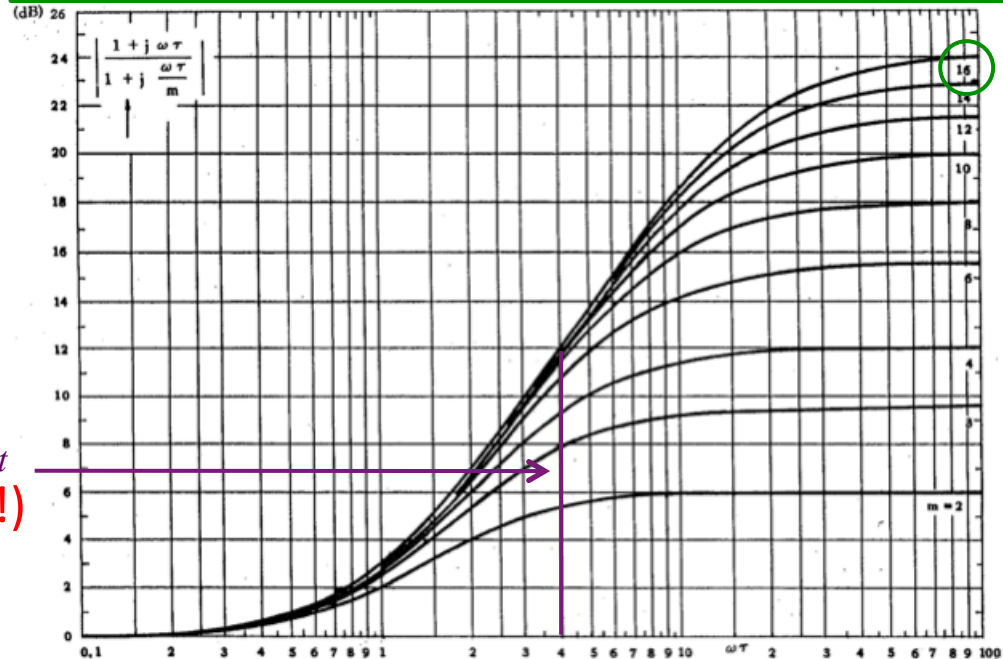
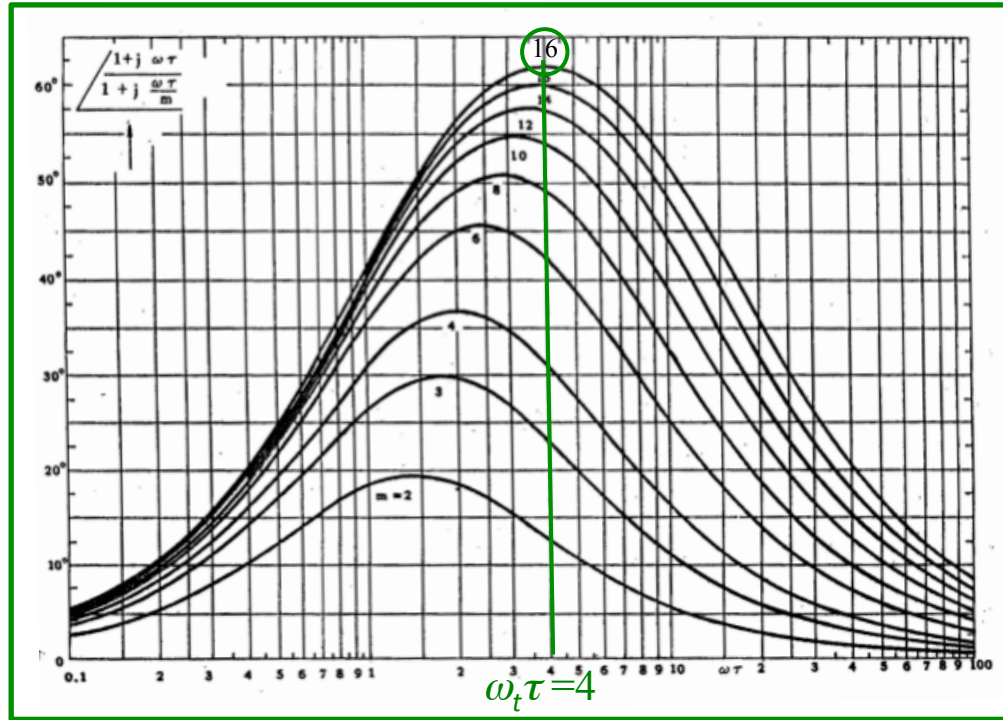


- i) **anticipatrice**
con 60° di
recupero
+
- ii) **successivo
guadagno**

Esempio # 3

$$\omega_t > \hat{\omega}_t$$

$$m_\varphi \geq \hat{m}_\varphi$$



+ 12 dB @ ω_t
(qui aiutano!)

i) **anticipatrice**

$m_a = 16$
per avere i 60°
necessari
di recupero

usata nel
picco

$$\omega_t \tau_a \cong 4$$

centrata @

$$\omega_t = 10$$

$$\Rightarrow \tau_a = 4/10 = 0.4$$

ii) **guadagno**

a valle dello
spostamento
in avanti della ω_t
servono altri
+ 9 dB ($K = 2.81$)

Soluzione # 3

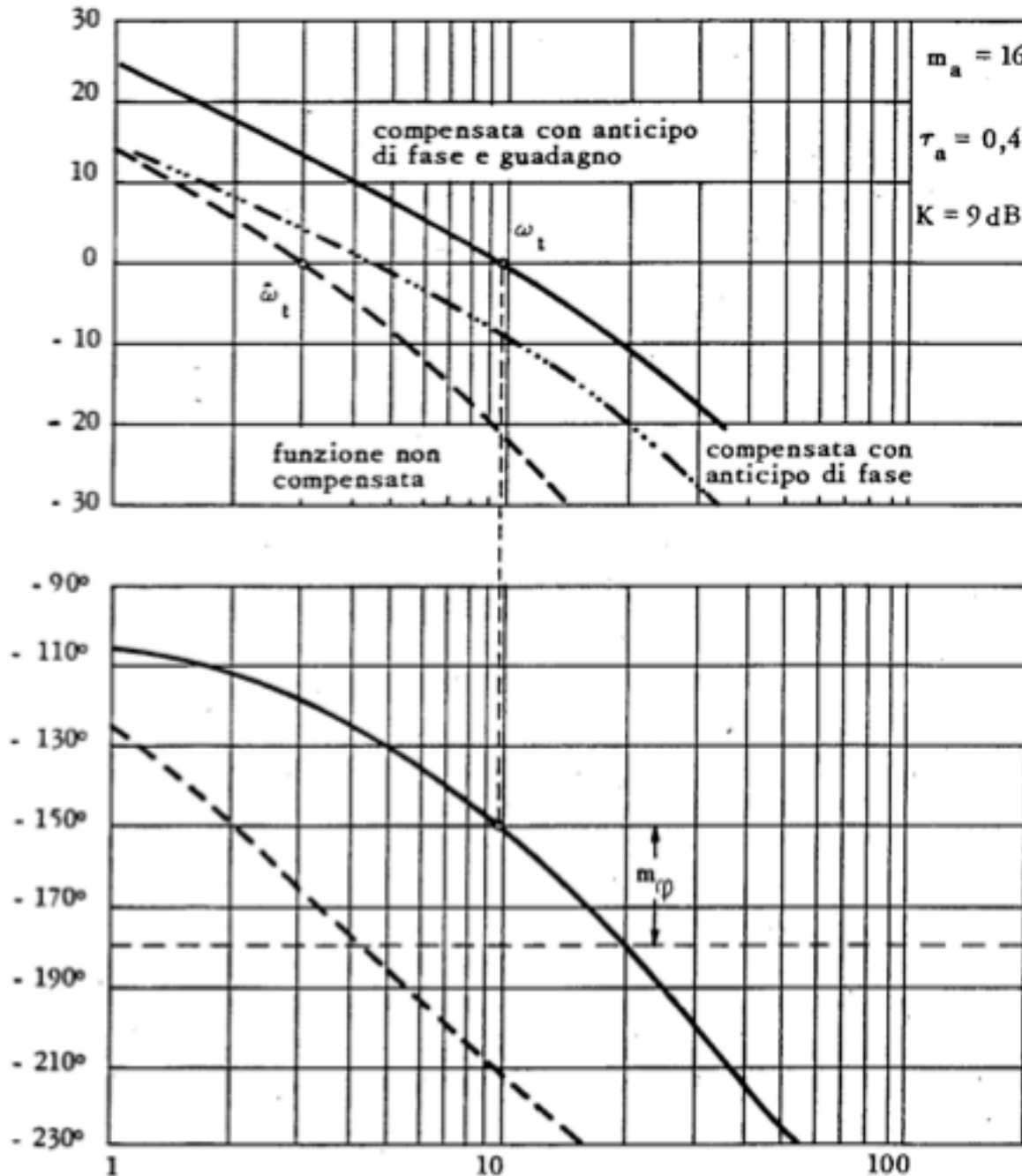
$$\begin{aligned}
 K \cdot R_{ant}(s) &= K \cdot \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= 2.81 \cdot \frac{1 + 0.4s}{1 + (0.4/16)s} \\
 &= 44.96 \cdot \frac{s + 2.5}{s + 40}
 \end{aligned}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t \cong 10$$

$$m_\varphi = 30^\circ$$



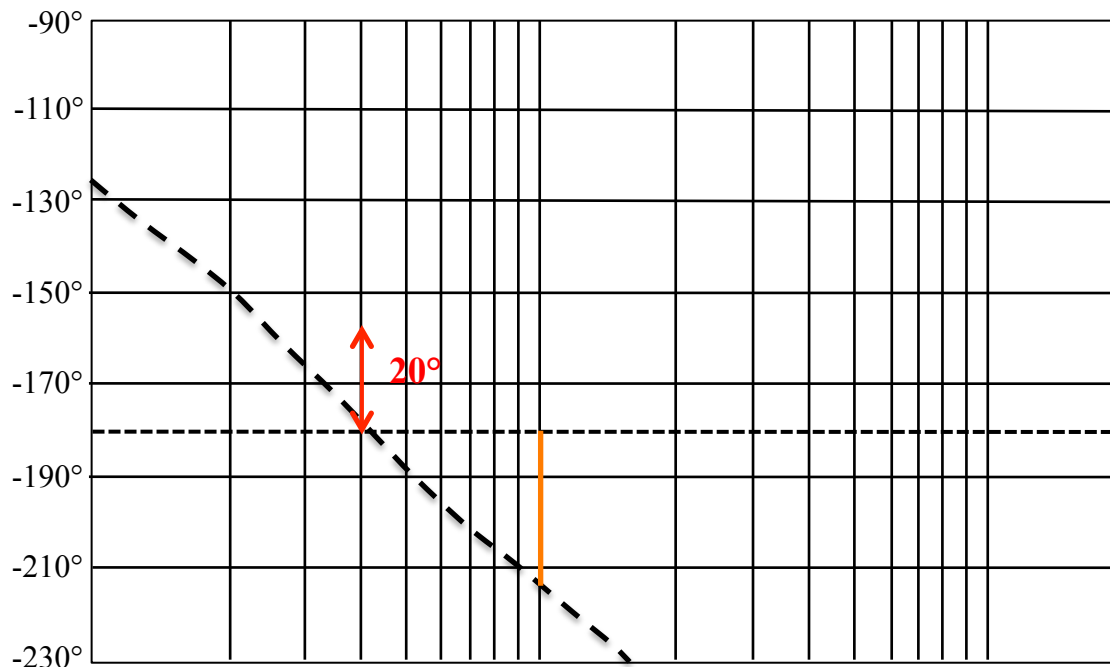
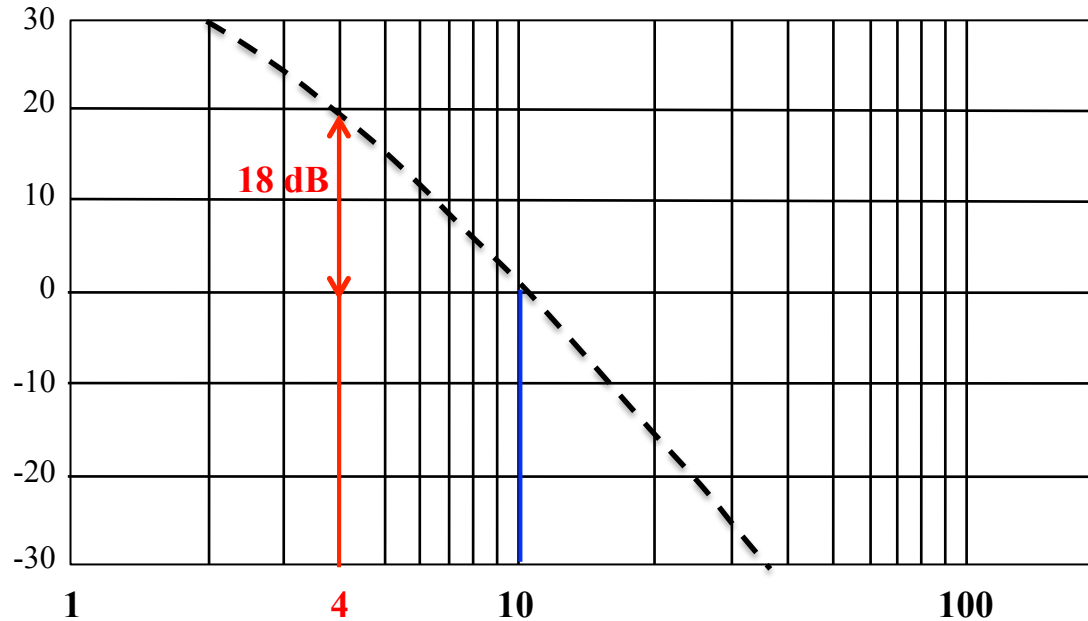
Esempio # 4

riduzione
della pulsazione
di attraversamento
migliorando il
margine di fase

iniziali

$$\hat{\omega}_t \cong 10$$

→ $\hat{m}_\varphi = \text{NO!}$



desiderati

$$\omega_t = 4$$

$$m_\varphi \geq 20^\circ$$



non basta solo
un'attenuatrice
(non ho margine
di fase @ ω_t)



i) **anticipatrice**
per avere margine
di fase $\geq 20^\circ$ @ ω_t

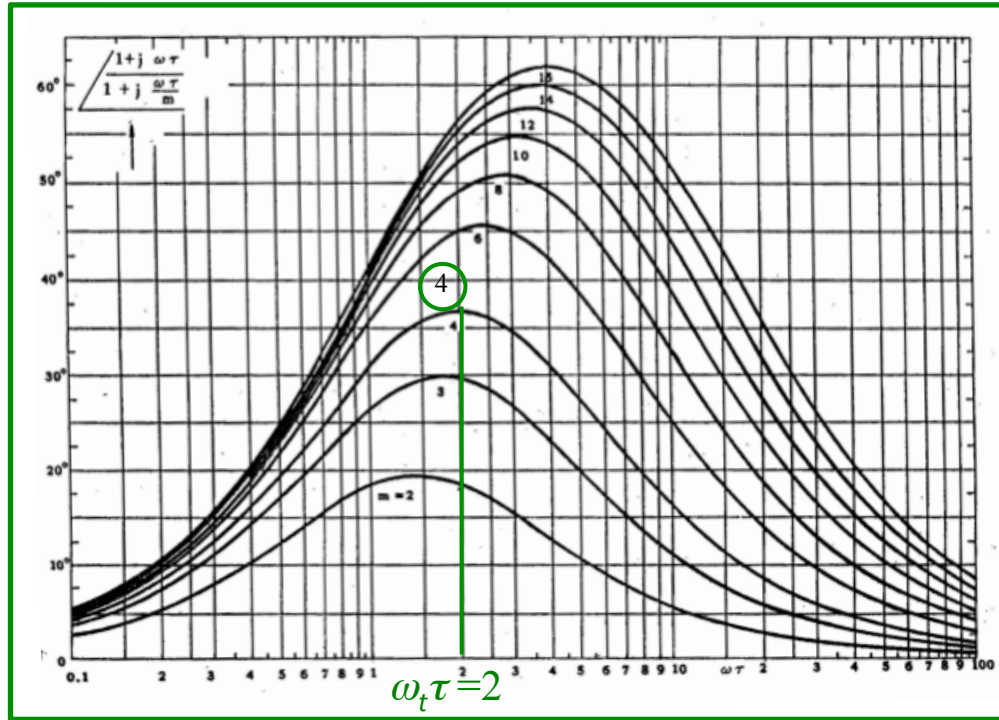
+

ii) **attenuatrice**
abbassa la ω_t
senza ridurre
il guadagno

Esempio # 4

$$\omega_t < \hat{\omega}_t$$

con m_φ



i) anticipatrice

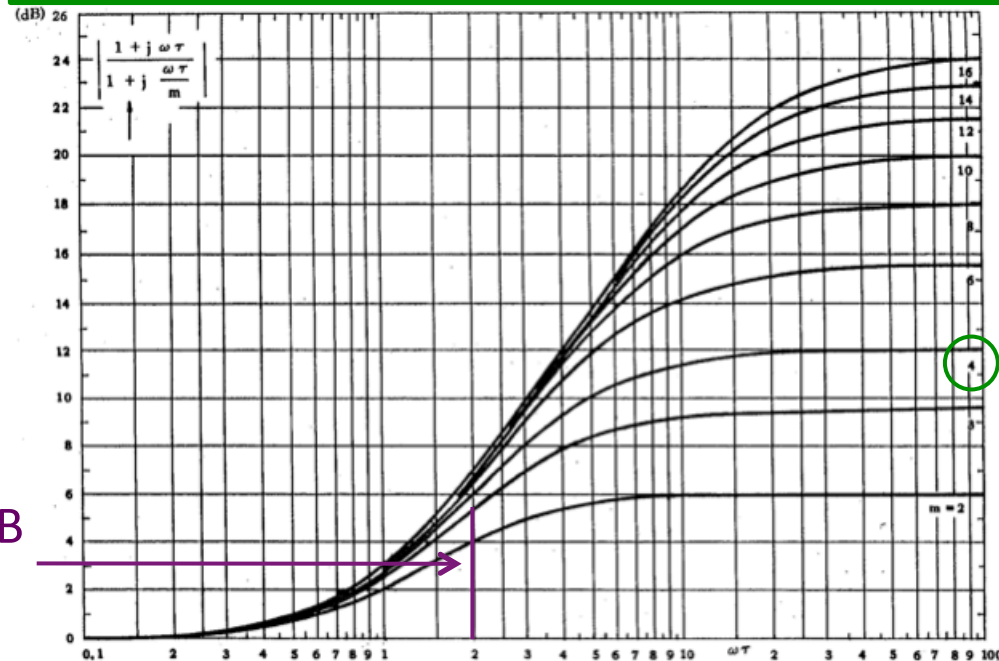
$m_a = 4$
 sufficiente per avere circa 37° @ ω_t
 (che perderò in parte nel seguito)

usata nel picco

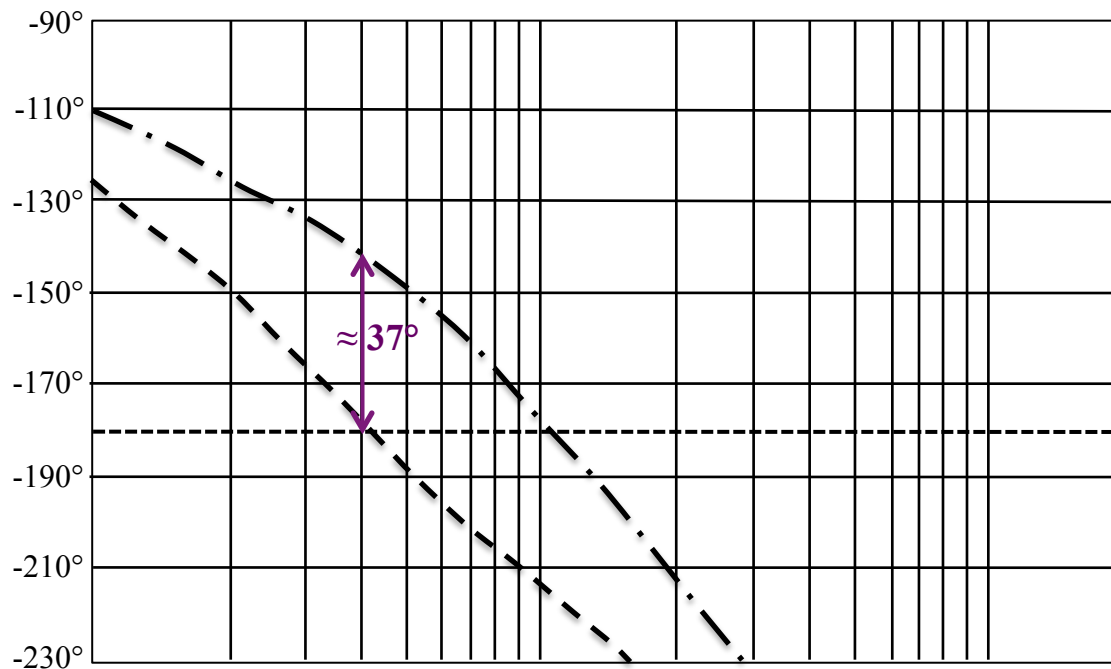
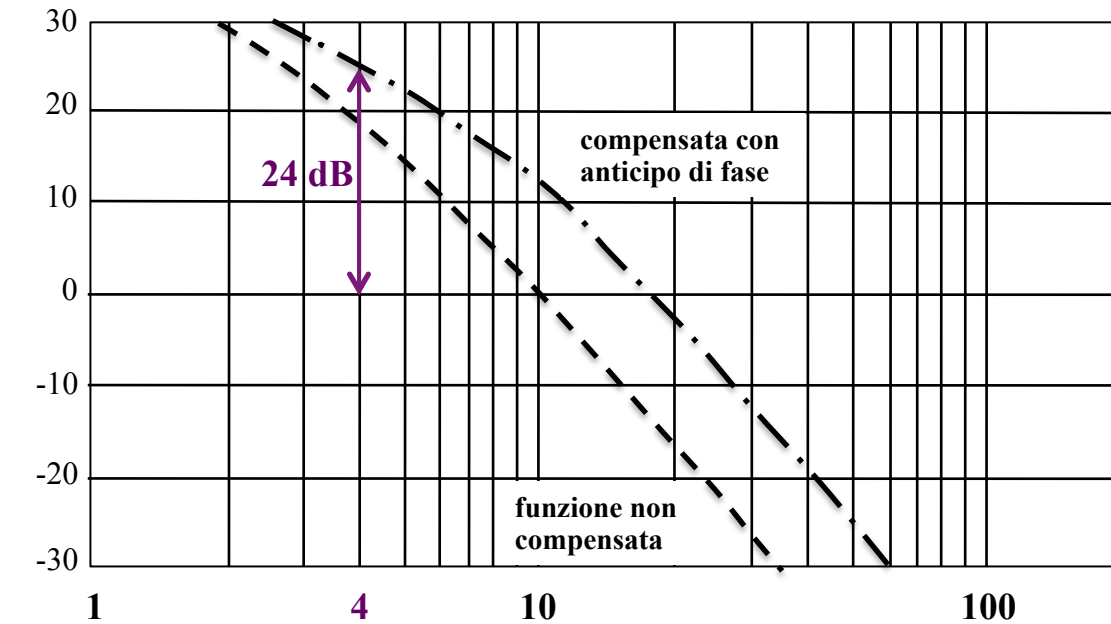
$\omega_t \tau_a = 2$

centrata @

$\omega_t = 4$
 $\Rightarrow \tau_a = 0.5$



$\approx +6$ dB
 @ ω_t



#4 dopo l'anticipatrice

$$\begin{aligned}
 R_{ant}(s) &= \frac{1 + \tau_a s}{1 + (\tau_a / m_a) s} \\
 &= \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.125s} \\
 &= 4 \cdot \frac{s + 2}{s + 8}
 \end{aligned}$$

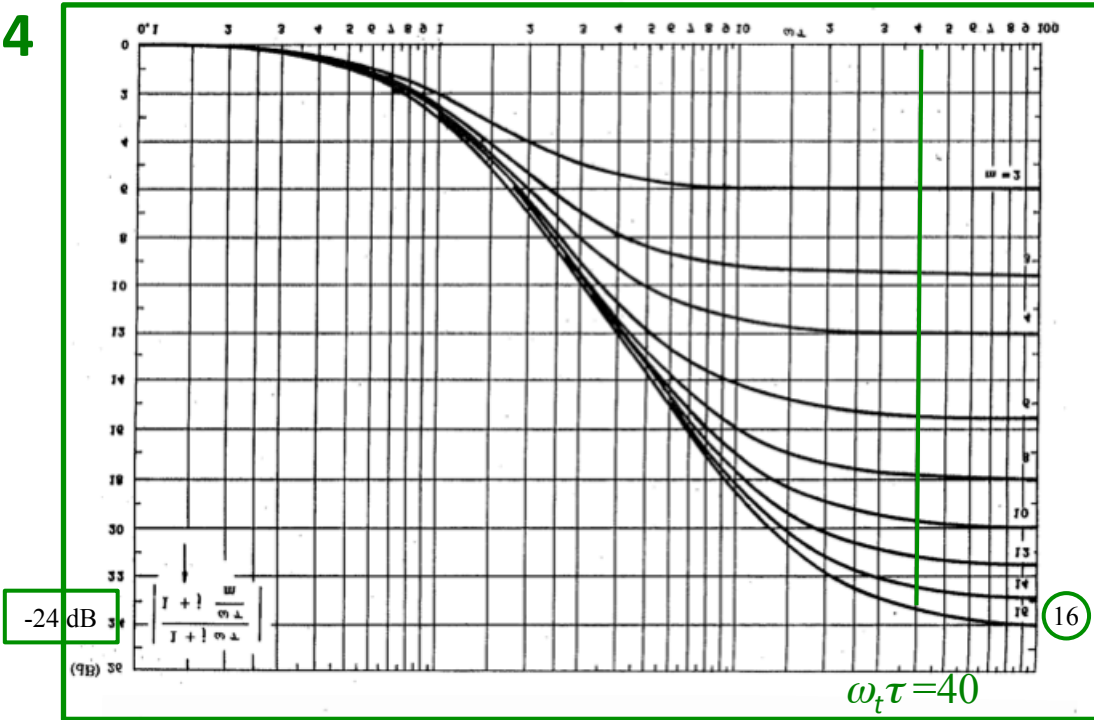


valori intermedi
 ottenuti @ $\omega_t = 4$
 \Rightarrow modulo = +24 dB
 \Rightarrow fase = $-180^\circ + 37^\circ$

Esempio # 4

$$\omega_t < \hat{\omega}_t$$

con m_φ

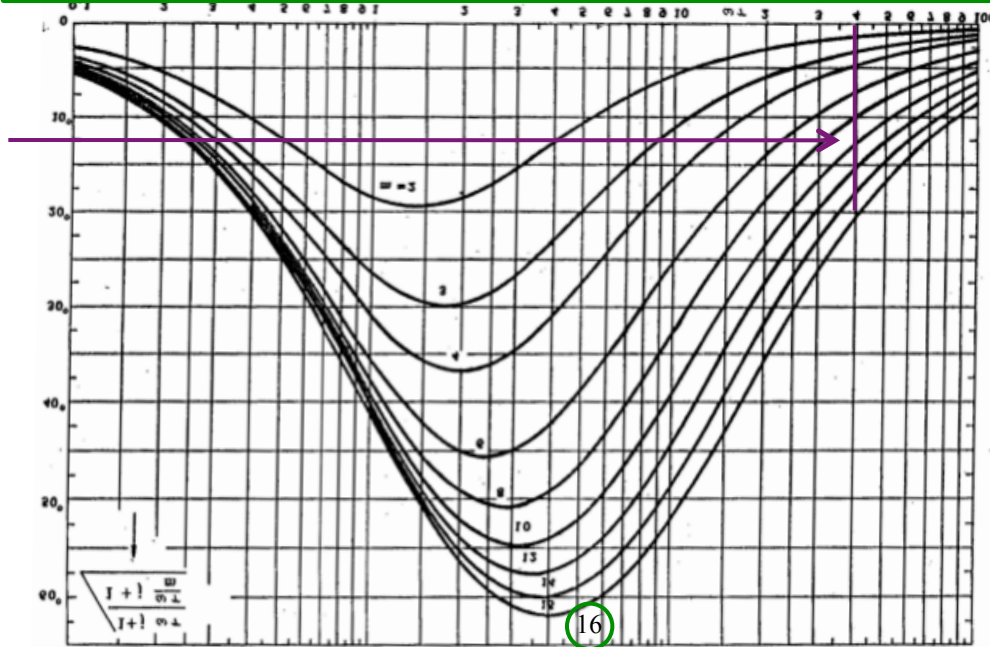


-24 dB

$\omega_t \tau = 40$

16

-20°
@ ω_t



16

ii) **attenuatrice**

$m_i = 16$
per avere -24 dB
necessari
di attenuazione

usata molto
in coda

$$\omega_t \tau_i \cong 40$$

centrata @

$$\omega_t = 4$$

$$\Rightarrow \tau_i = 40/4 = 10$$

$$\begin{aligned} R_{att}(s) &= \frac{1 + (\tau_i/m_i)s}{1 + \tau_i s} \\ &= \frac{1 + (10/16)s}{1 + 10s} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{s + 1.6}{s + 0.1} \end{aligned}$$

Soluzione # 4

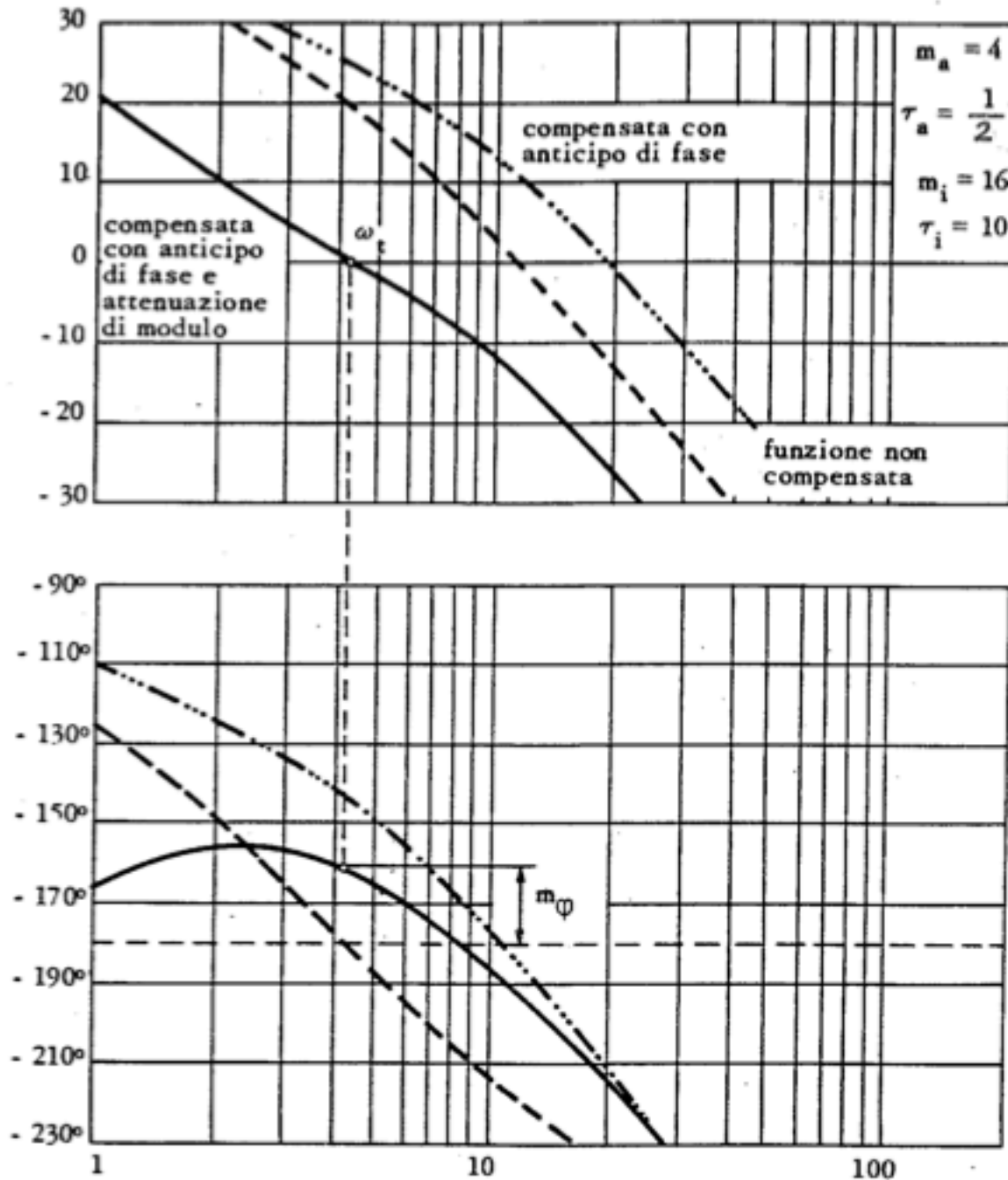
$$R_{ant}(s) \cdot R_{att}(s) = \frac{1+0.5s}{1+0.125s} \cdot \frac{1+0.625s}{1+10s}$$



valori finali ottenuti

$$\omega_t \cong 4$$

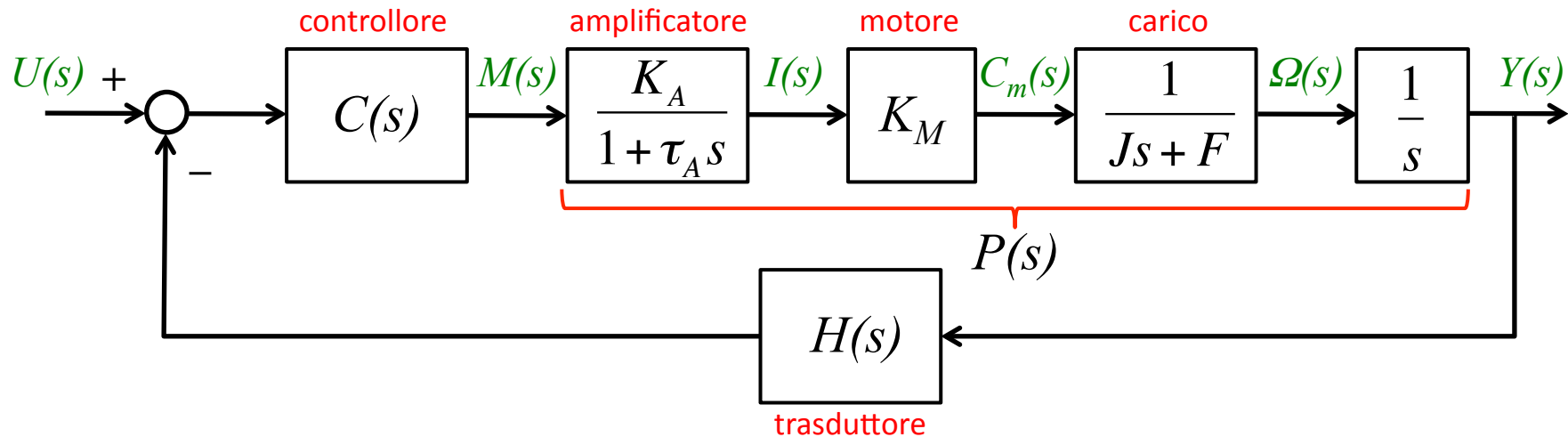
$$m_\varphi \cong 17^\circ$$



Esercizio

ASSERVIMENTO DI POSIZIONE ANGOLARE

- motore in CC alimentato sulla corrente d'armatura
- carico inerziale con attrito viscoso



$$K_A = 10 \text{ [A/V]}$$

$$\tau_A = 10 \text{ [ms]}$$

$$K_M = 0.1 \text{ [Nm/A]}$$

$$H(s) = 1/K_d = 1 \text{ [V/rad]}$$

$$J = 1 \text{ [kgm}^2\text{/rad]}$$

$$F = 1 \text{ [Nm/(rad/s)]}$$

(retroazione unitaria)

- processo

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$$

- struttura del controllore

$$C(s) = \frac{K_C}{s^h} R(s)$$

- specifiche a regime permanente

- errore nella risposta a rampa unitaria: $e_1 \leq 0.1$ [rad]

sistema di controllo già di **tipo 1** $\Rightarrow h = 0$ (nessun polo aggiunto in $s = 0$)

$$K_P = 1, K_d = 1 \Rightarrow e_1 = \frac{K_d^2}{K_G} = \frac{K_d^2}{K_C K_P} = \frac{1}{K_C} \Rightarrow K_C = \frac{1}{e_1} \geq \frac{1}{0.1} = 10$$

- specifiche sul transitorio (sulla risposta indiciale)

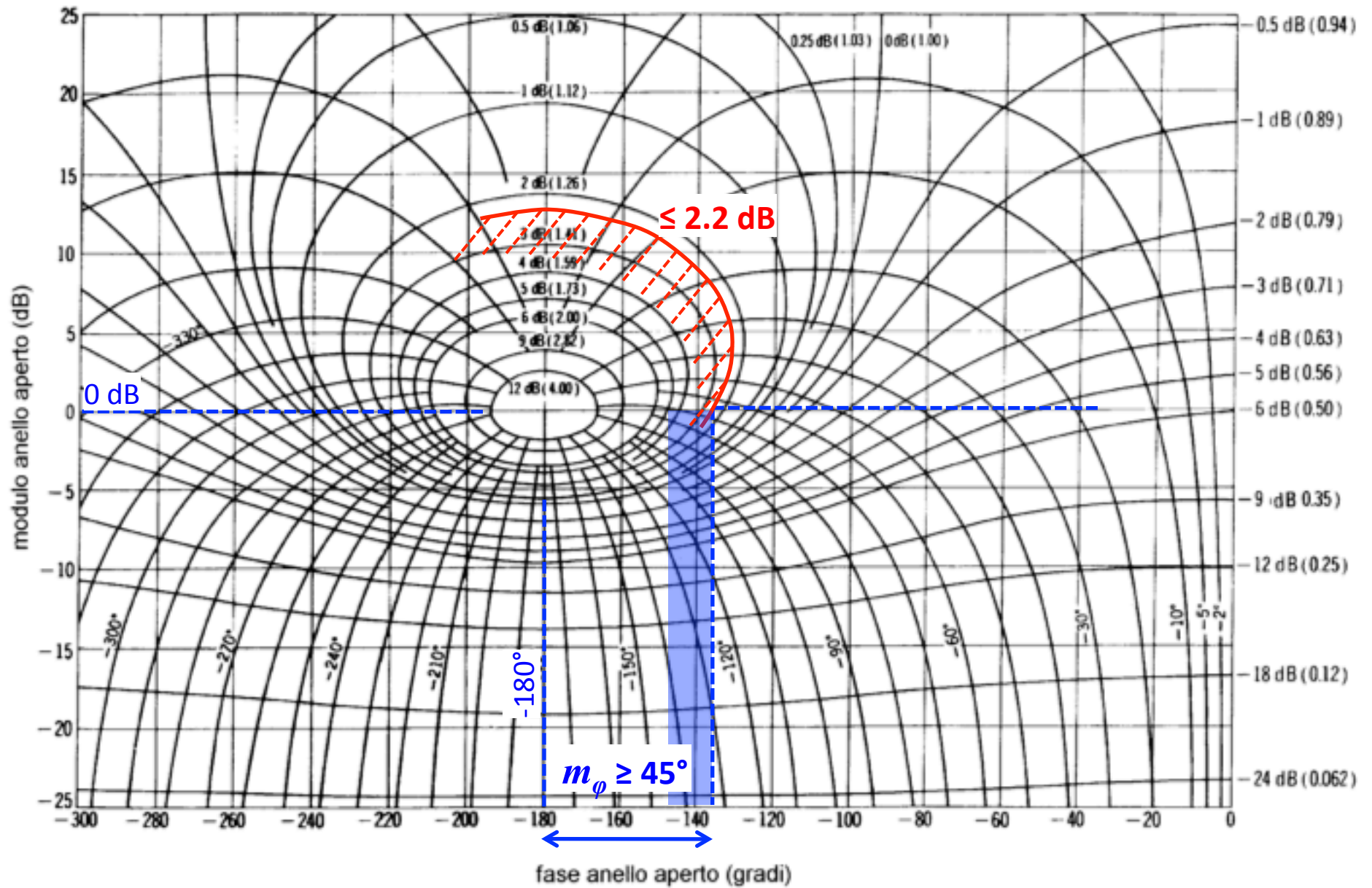
- sovraelongazione: $\hat{s} \leq 0.1$

$$1 + \hat{s} = 1.1 \approx 0.85 M_r \Rightarrow M_r = 20 \log_{10} \frac{1.1}{0.85} \approx 2.2 \text{ dB}$$

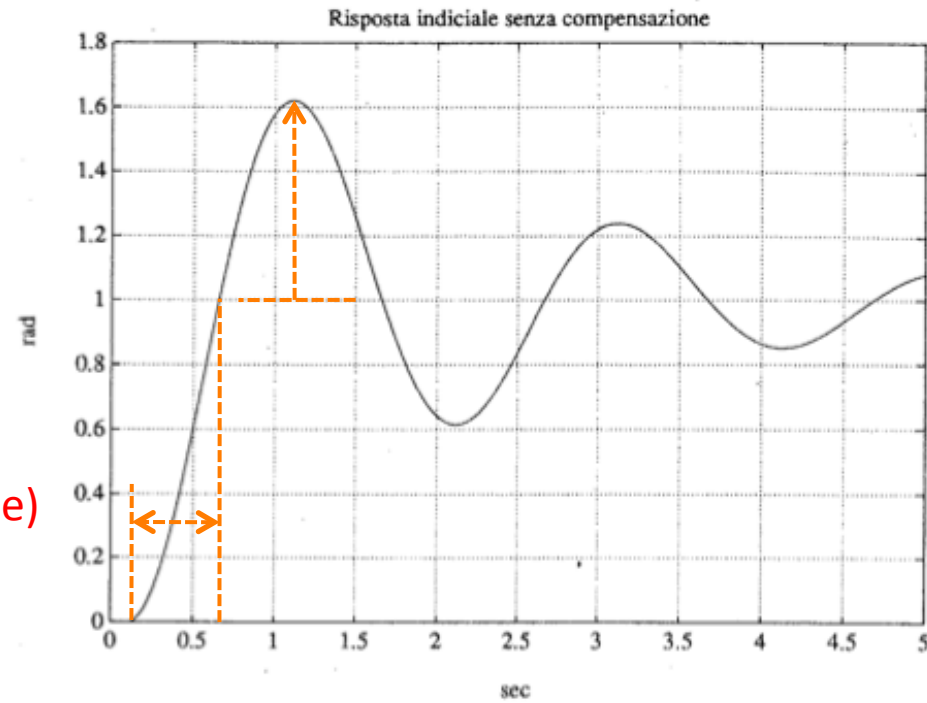
$$m_\varphi \geq 60^\circ - 6 M_r|_{dB} \approx 47^\circ \quad (\text{formula empirica}) \quad \text{oppure} \quad m_\varphi \geq 45^\circ \quad (\text{carta di Nichols})$$

- tempo di salita: due specifiche alternative

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } t_s \leq 2 \text{ [s]} \\ \text{b) } t_s \leq 0.2 \text{ [s]} \end{array} \right\} B_3 \cdot t_s \approx 3 \left\{ \begin{array}{l} B_3 \approx 1.5 \text{ [rad/s]} = 0.2 \text{ [Hz]} \Rightarrow \omega_t \in 0.7 \div 1.4 \text{ [rad/s]} \\ \hspace{10em} \Rightarrow \omega_t = 1 \text{ [rad/s]} \\ B_3 \approx 15 \text{ [rad/s]} \Rightarrow \omega_t = 10 \text{ [rad/s]} \end{array} \right.$$



risposta ad anello chiuso
ad un gradino unitario
in $t_0 = 0.1$ s
con solo $C(s) = K_C = 10$
(senza rete di compensazione)

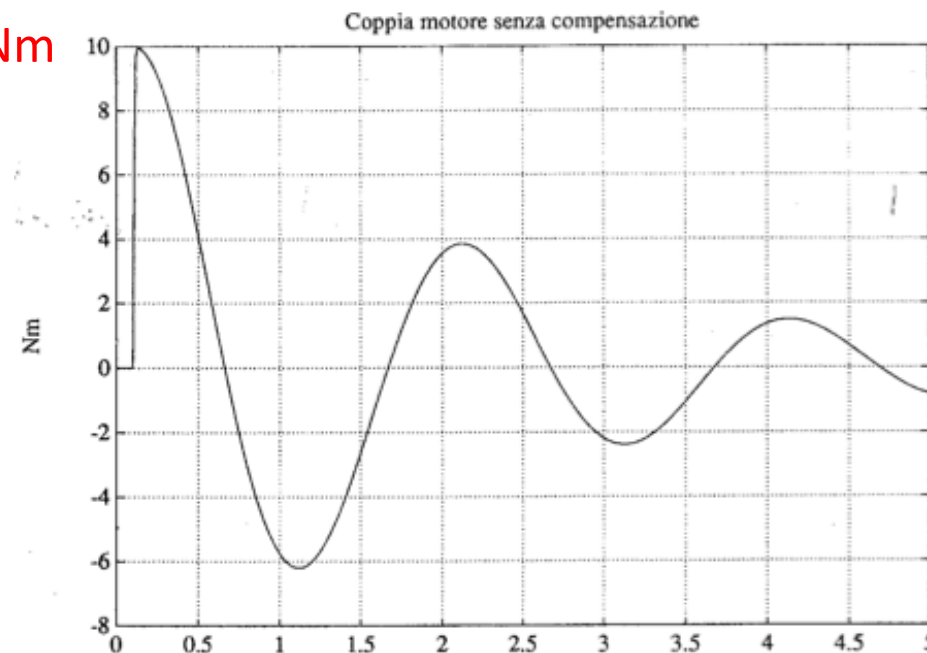


$$\hat{s} \approx 0.6$$

$$t_s = 0.65 \text{ [s]}$$

max coppia iniziale = 10 Nm

sforzo di controllo
associato



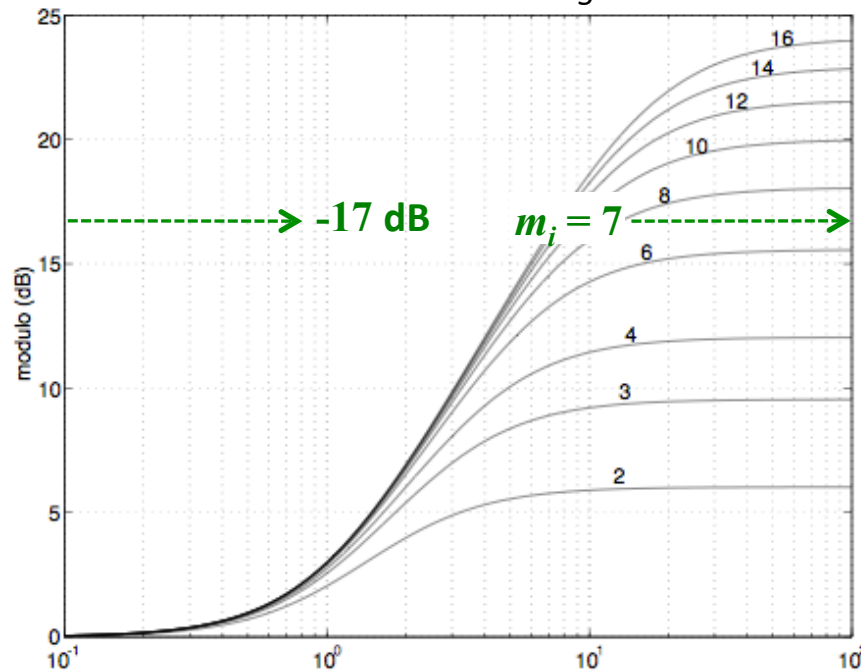
specifiche caso a) $\omega_{t,des} = 1$ [rad/s], $m_{\phi,des} \geq 47^\circ$

processo corretto per specifiche a regime ($K_c = 10$): $10 \cdot P(s) = 10 \cdot \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$

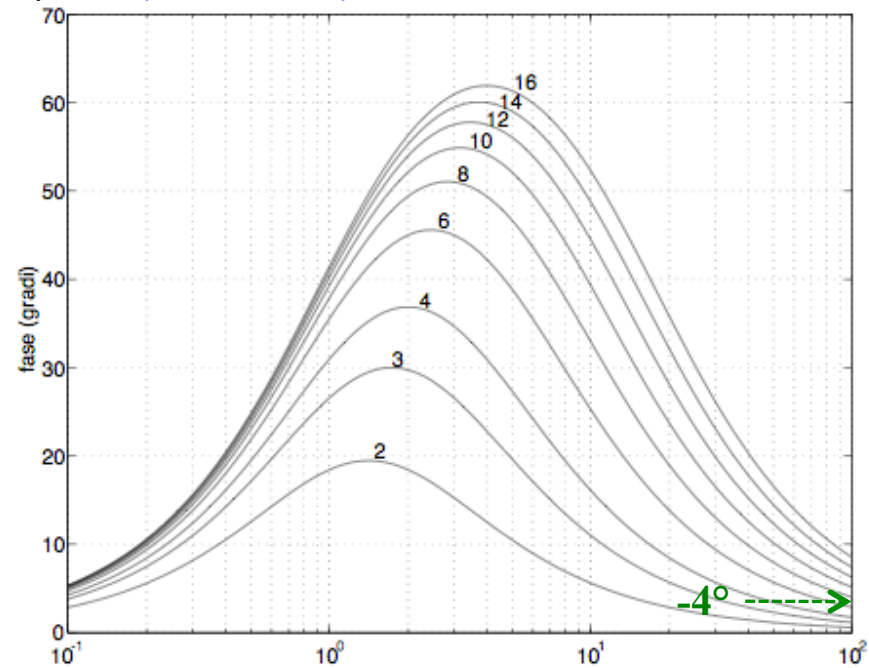
valori attuali per $10 P(s)$: $\omega_t = 3$ [rad/s], $m_\phi = 15^\circ$

valori @target: $|10 P(j\omega_{t,des})| = 17$ dB, $\angle P(j\omega_{t,des}) = -135^\circ \Rightarrow$ **attenuatrice**
(usata in coda)

diagrammi delle reti anticipatrici (da ribaltare!)



$\tau = 100 \leftarrow @\omega_t = 1 \leftarrow \omega\tau = 100$



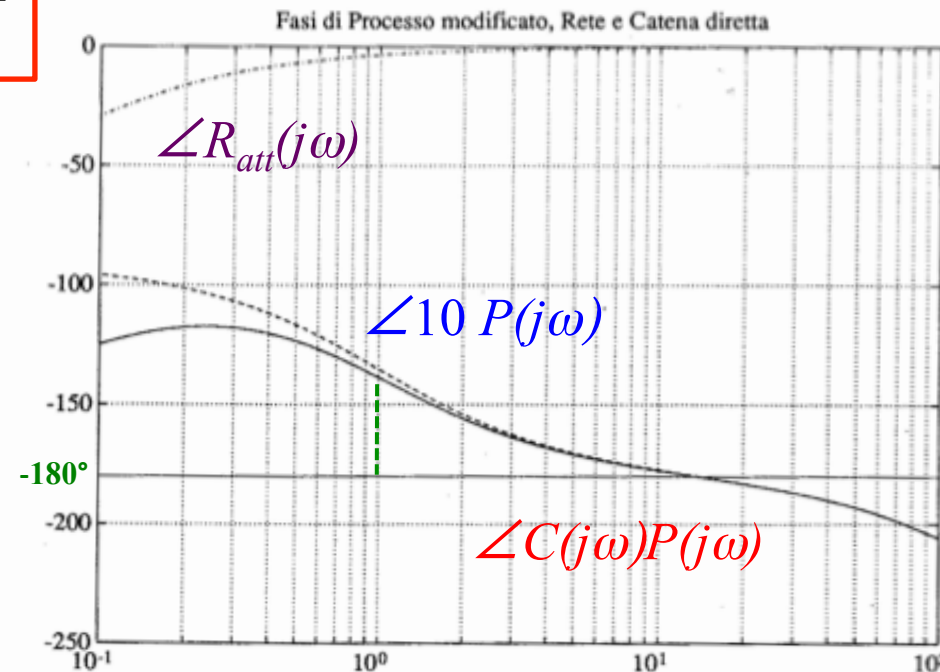
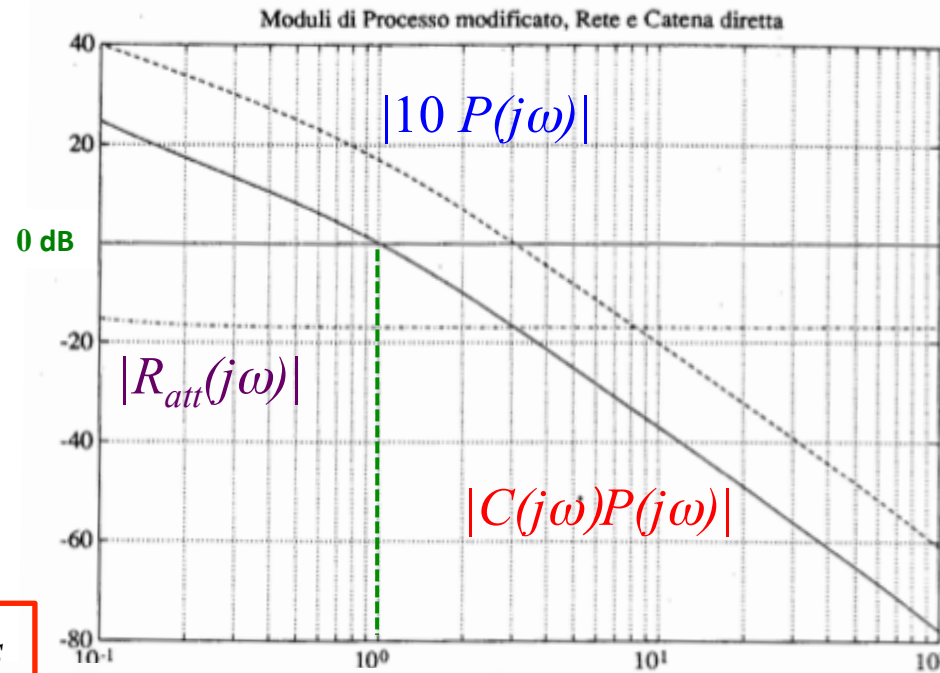
$R_{att}(s) = \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$

$\omega\tau = 100$

caso a)

$$\omega_t = \omega_{t,des} = 1 \text{ [rad/s]}$$

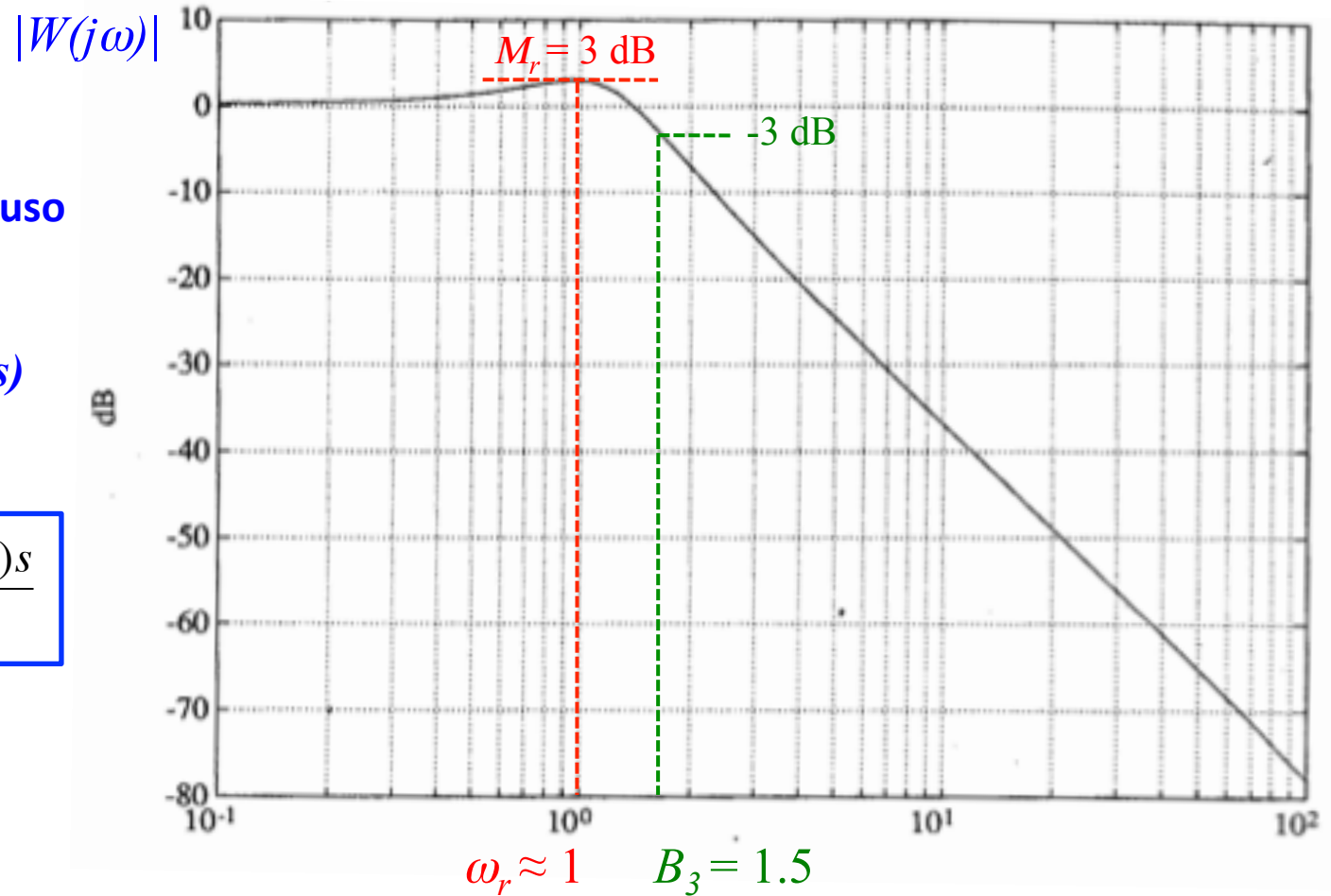
$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$



$$m_\varphi = 42^\circ$$
$$(m_{\varphi,des} \geq 47^\circ)$$

sistema ad anello chiuso
 modulo della
 risposta armonica
 con $C(s) = K_C R_{att}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$



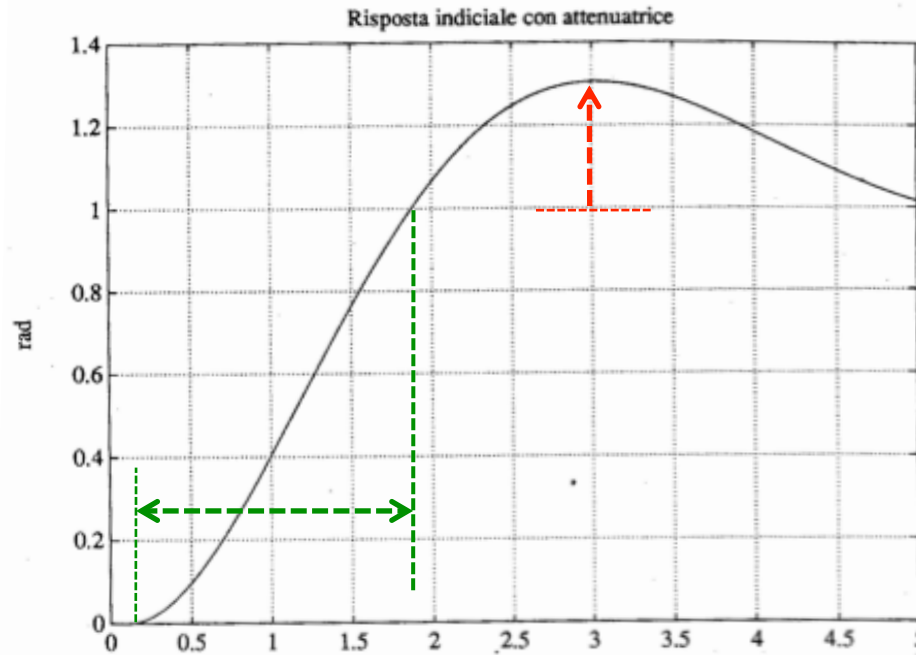
caso a) $M_r = 3 \text{ vs. } 2.2 \text{ [dB]}$ ✗

$B_3 = 1.5 \text{ vs. } 1.5 \text{ [rad/s]}$ ✓

sistema ad anello chiuso
 risposta nel tempo
 ad un gradino unitario
 in $t_0 = 0.1$ s
 con $C(s) = K_C R_{att}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (100/7)s}{1 + 100s}$$

sfuerzo di controllo
 associato



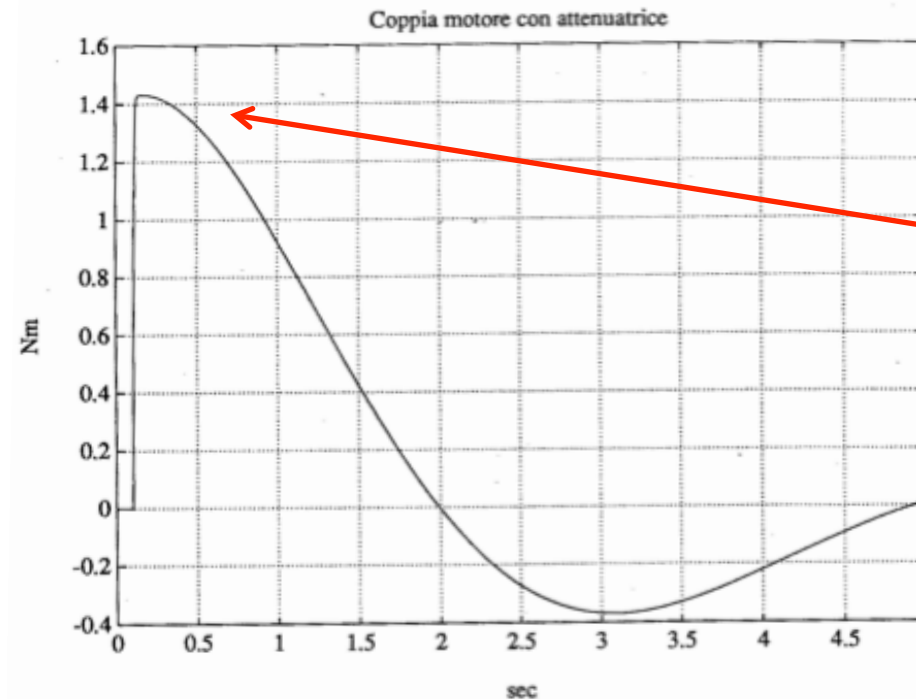
caso a)

$\hat{s} = 0.3$ vs. 0.1

✗

$t_s = 1.7$ vs. 2 [s]

✓



picco iniziale
 ridotto
 (1.4 Nm)

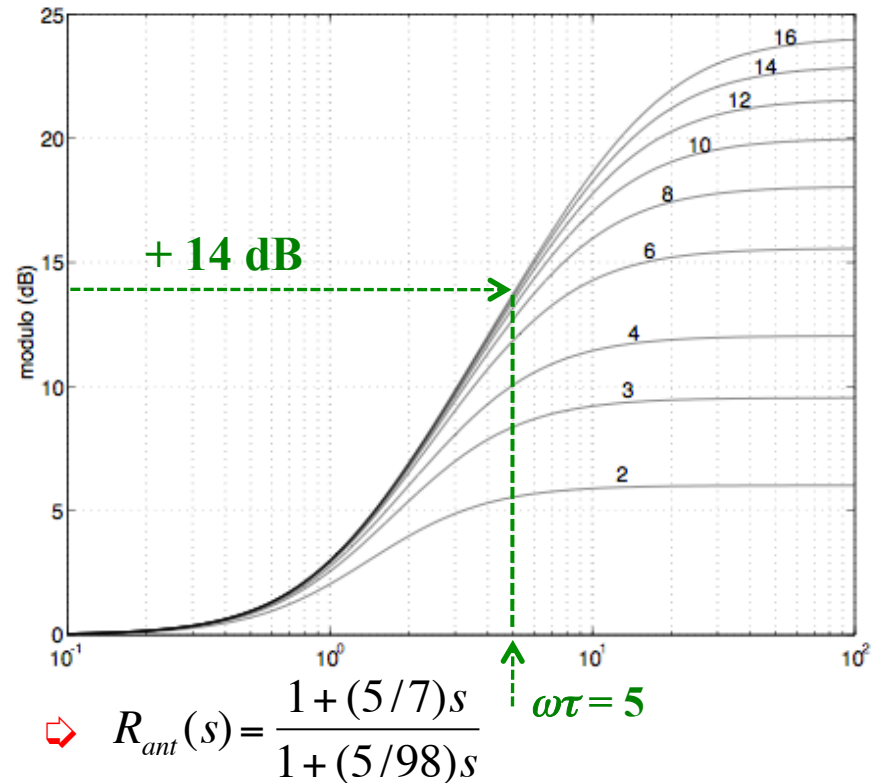
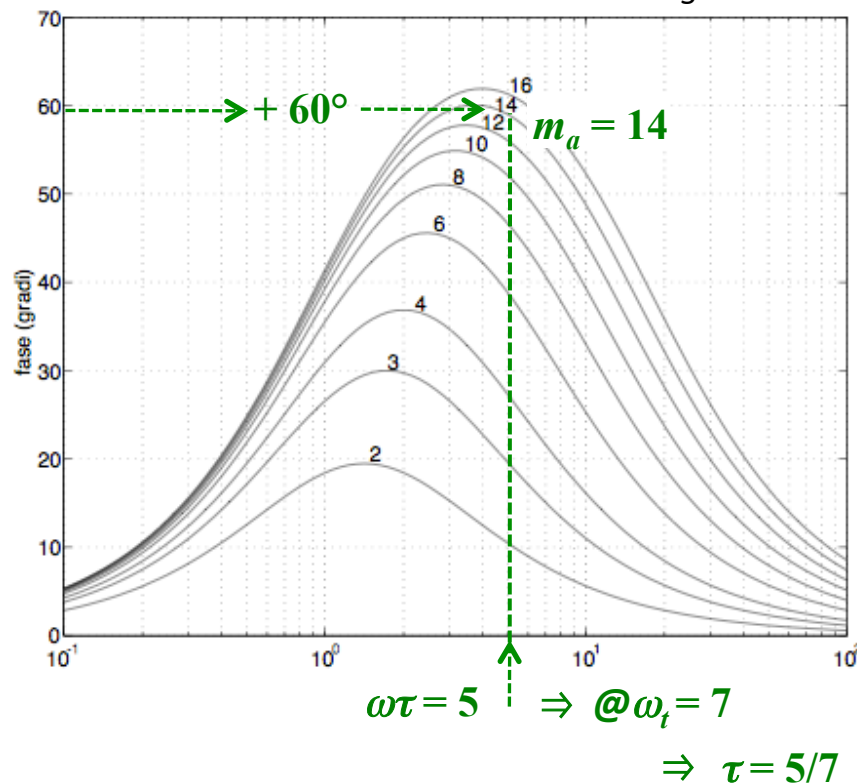
specifiche caso b) $\omega_{t,des} = 10$ [rad/s], $m_{\phi,des} \geq 47^\circ$

processo corretto per specifiche a regime ($K_c = 10$): $10 \cdot P(s) = 10 \cdot \frac{1}{s(1+s)(1+0.005s)}$

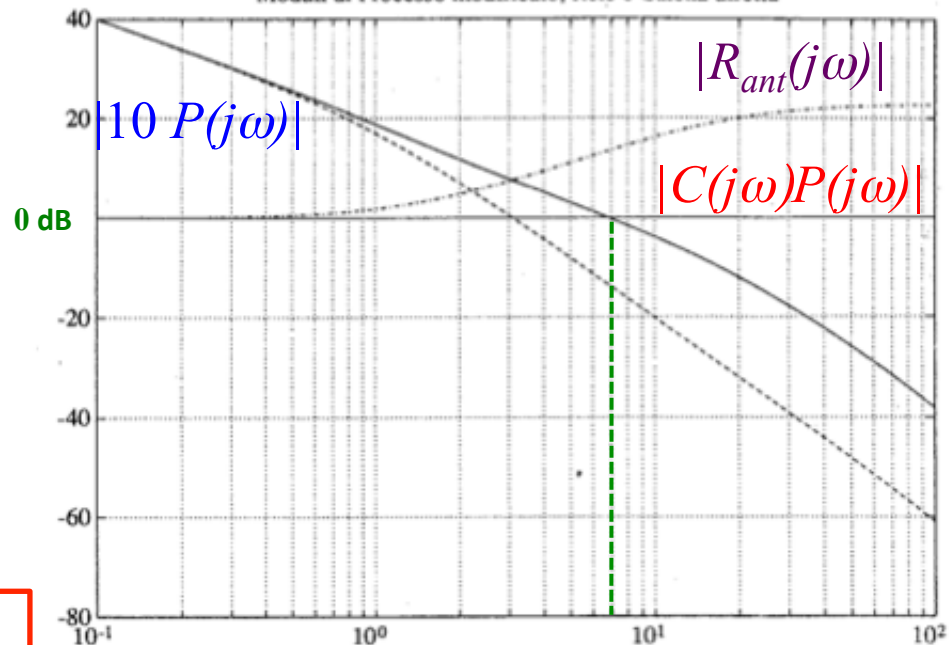
valori attuali per $10 P(s)$: $\omega_t = 3$ [rad/s], $m_\phi = 15^\circ$

valori @target: $|10 P(j\omega_{t,des})| = -20$ dB, $\angle P(j\omega_{t,des}) = -180^\circ \Rightarrow$ grande anticipatrice (vicino al picco)

diagrammi delle reti anticipatrici

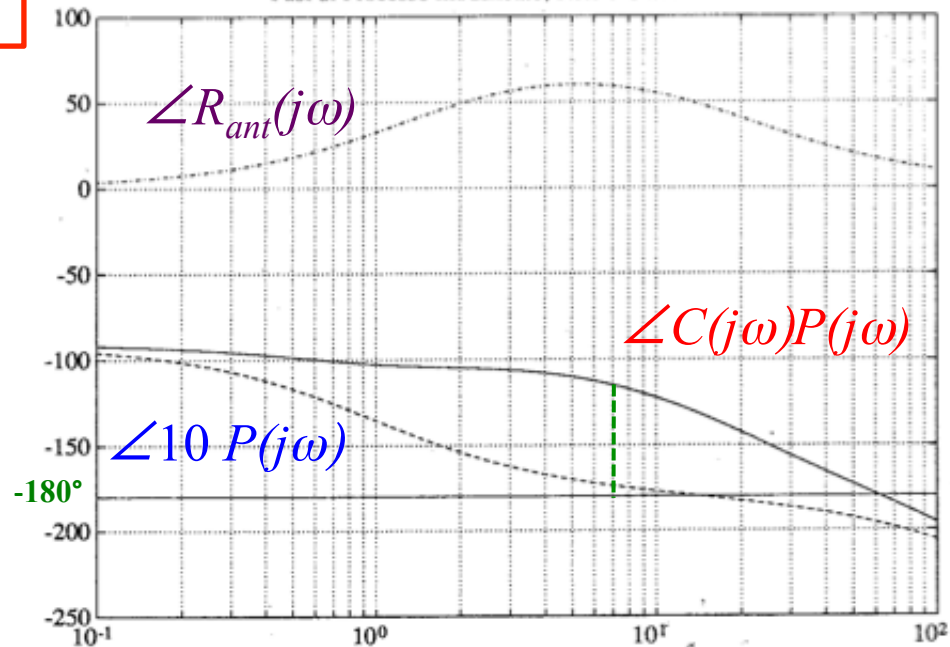


Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta



$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta



caso b)

$$\omega_t \approx 7 \text{ [rad/s]}$$

$$(\omega_{t,des} = 10 \text{ [rad/s]})$$



si potevano aggiungere circa +4 dB di guadagno sistemando il tutto!



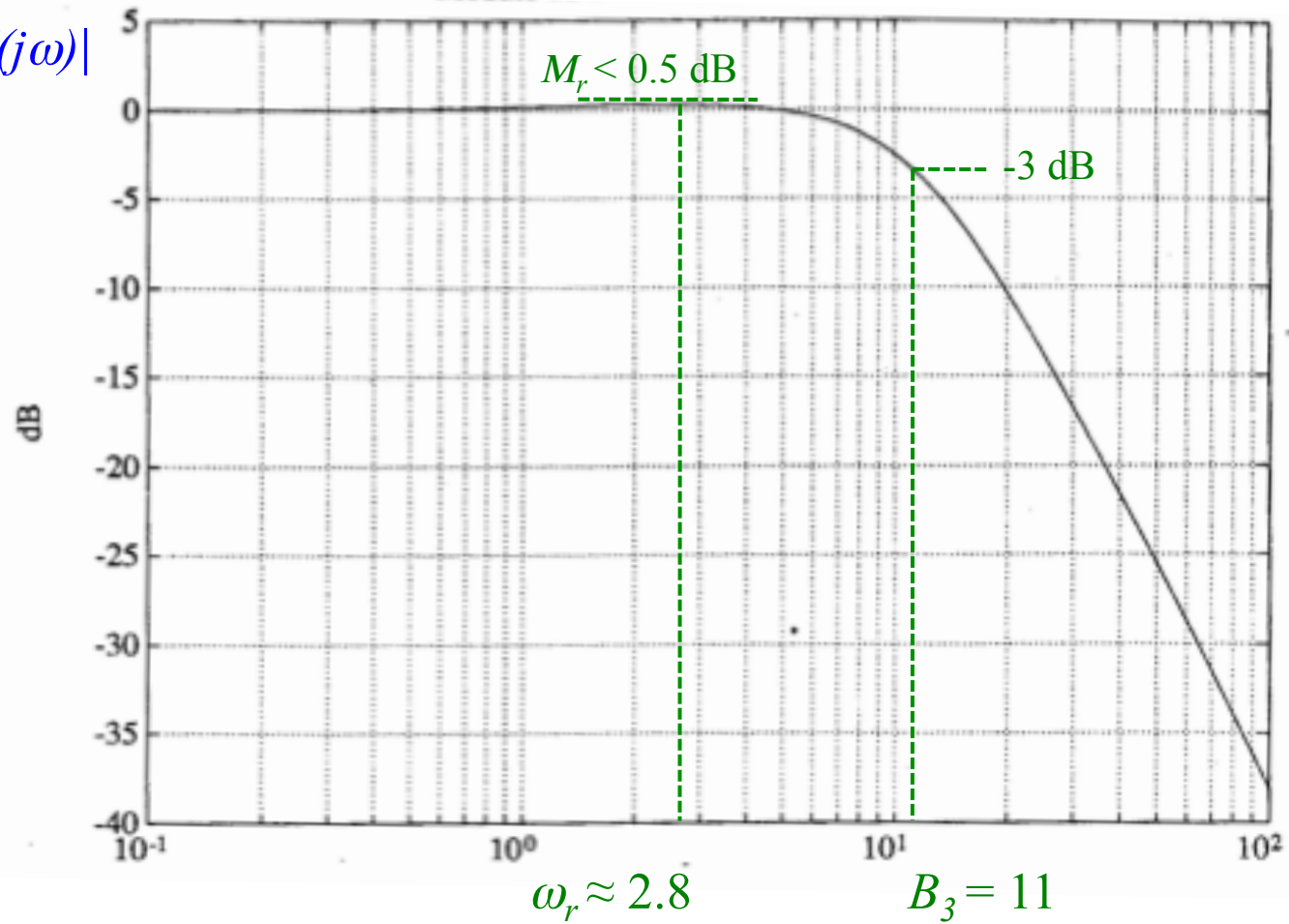
$$m_\varphi = 65^\circ$$

$$(m_{\varphi,des} \geq 47^\circ)$$

$|W(j\omega)|$

sistema ad anello chiuso
modulo della
risposta armonica
con $C(s) = K_C R_{ant}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$



caso a)

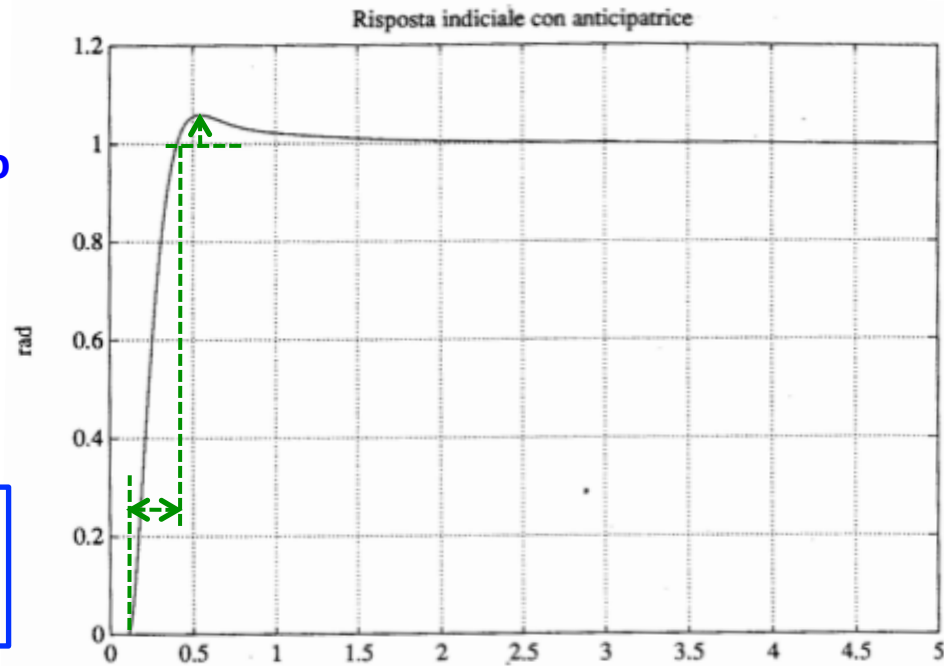
$M_r < 0.5$ vs. 2.2 [dB] ✓

$B_3 = 11$ vs. 15 [rad/s] ~✓

sistema ad anello chiuso
 risposta nel tempo
 ad un gradino unitario
 in $t_0 = 0.1$ s
 con $C(s) = K_C R_{ant}(s)$

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1 + (5/7)s}{1 + (5/98)s}$$

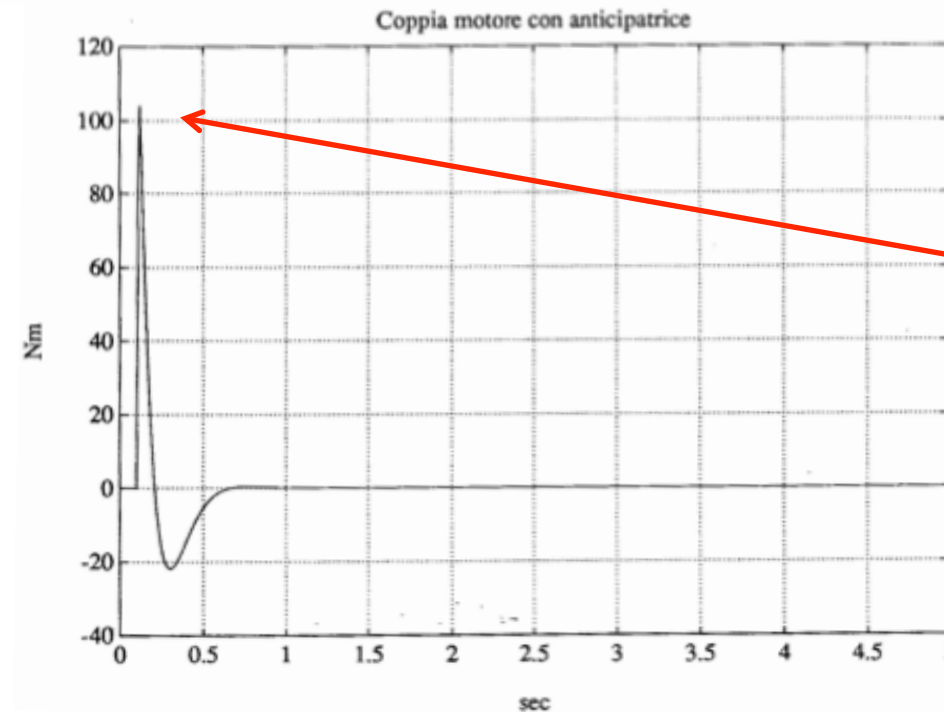
sforzo di controllo
 associato



caso b)
 $\hat{s} = 0.06$ vs. 0.1



$t_s = 0.3$ vs. 0.2 [s]



picco iniziale
 aumentato
 (> 100 Nm!)